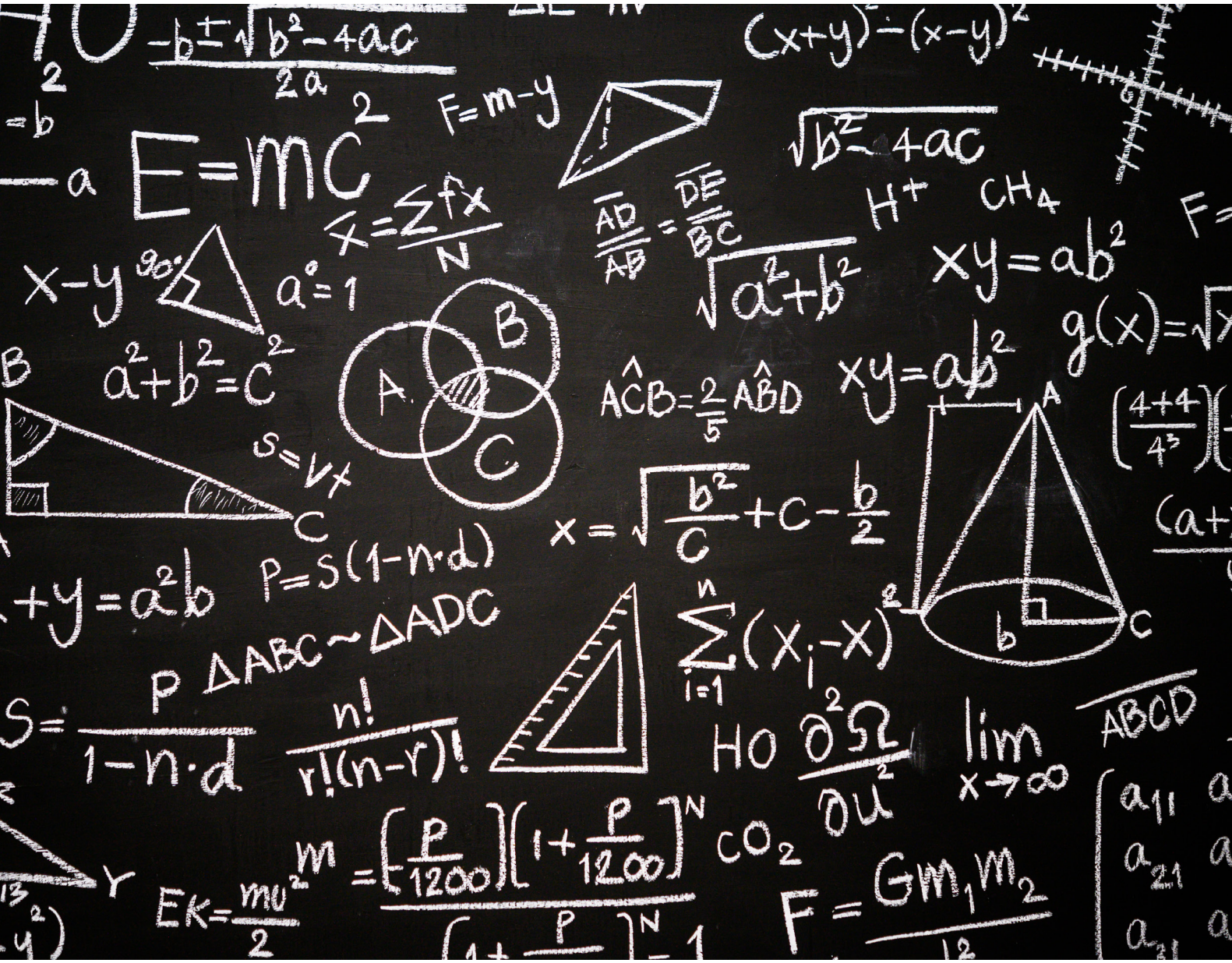
Temari d'oposicions

MATEMÀTIQUES I

Carolina Liern Pérez



educàlia editorial

Temari d'opocions

MATEMÀTIQUES I

Carolina Liern Pérez

educàlia
editorial

Edició 2023. Revisat al 2024

Autora: Carolina Liern Pérez

Edita: Educàlia Editorial

Imprimix: Grupo Digital 82, S. L.

ISBN: 978-84-18777-97-4

Dipósit Legal: V-4045-2023

Printed in Spain / Impress en España.

Tots els drets reservats. No està permesa la reimpressió de cap part d'aquest llibre, ni de imàgens ni de text, ni tampoc la seua reproducció, ni utilització, en qualsevol forma o per qualsevol mitjà, ja siga electrònic, mecànic o d'una altra manera, tant coneguda com els que puguen inventar-se, incloent-hi el fotocopiat o enregistrament, ni està permés emmagatzemar-lo en un sistema d'informació i recuperació, sense el permís anticipat i per escrit de l'editor.
Alguna de les imatges que inclou aquest llibre són reproduccions que s'han realitzat acollint-se al dret de cita que apareix en l'article 32 de la Llei 22/1987, d'11 de novembre, de la Propietat intel·lectual. Educalia Editorial agraeix a totes les institucions, tant públiques com privades, citades en aquestes pàgines, la seua col·laboració i demana disculpes per la possible omissió involuntària d'algunes d'elles.

Educàlia Editorial

Avda. de las Jacarandas 2 loft 327 46100 Burjassot-València

Tel. 960 624 309 - 963 768 542 - 610 900 111

Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com

www.e-ducalia.com

TEMA 1

NOMBRES NATURALS. SISTEMES DE NUMERACIÓ.

0. INTRODUCCIÓ
1. AXIOMÀTICA DEL NOMBRE NATURAL
   a. Axiomes de Peano
2. EL SEMIANELL ORDENAT $\mathbb{N}$
   a. Suma en $\mathbb{N}$
   b. Producte en $\mathbb{N}$
   c. Ordre en $\mathbb{N}$
   d. Divisió en $\mathbb{N}$
3. SISTEMES DE NUMERACIÓ
   a. Definició
   b. Teorema fonamental de la numeració. Propietats
   c. Canvis de base

CONCLUSIÓ
REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

0. INTRODUCCIÓ

Va haver de passar molt de temps fins que la humanitat aprenguera a representar amb el mateix símbol un conjunt format per sis cavalls i un altre per sis pomes. Es va anar descobrint que els nombres servien per a comptar i comparar coses, i més endavant per a fer operacions amb ells i per a mesurar. Amb tot això va sorgir la necessitat de la representació dels nombres i la seua organització en diferents sistemes de numeració.

La humanitat experimentalment va descobrir que la suma i el producte posseïen la propietat commutativa o l'associativa. Així va anar traçant-se l'aritmètica com la ciència dedicada a l'estudi dels nombres i les seues relacions. L'aritmètica considera les propietats generals dels nombres, fent abstracció del particular i concret, podent així aplicar les seues conclusions a casos generals.

En aquest tema desenvoluparem la construcció axiomàtica del conjunt dels nombres naturals, veurem les operacions en aquest conjunt, la relació d'ordre que posseeix i els sistemes de numeració. Els coneixements previs que necessitarem per a desenvolupar aquest tema són els relatius a la divisibilitat (tema 4) i a les relacions binàries (tema 11).

1. AXIOMÀTICA DEL NOMBRE NATURAL

La profunda revisió que va patir la matemàtica en el segle XIX va començar amb la fonamentació del concepte de nombre. El conjunt dels nombres naturals va quedar establit mitjançant un sistema axiomàtic i, a partir d'ell, es van construir els conjunts de nombres sencers, racionals, reals i complexos.

A continuació estudiarem els axiomes sobre els quals es basa la construcció dels nombres naturals.

a. Axiomes de Peano

Aquests axiomes els va establir Peano a l'ombra de la nova teoria de conjunts apareguda a la fi del segle XIX.

- A1. El zero és un nombre natural ($0 \in \mathbb{N}$).
- A2. A cada nombre natural $x \in \mathbb{N}$ li correspon un únic nombre natural anomenat següent de x i al que denotem per $s(x)$. Si $x \in \mathbb{N}$, $s(x) \in \mathbb{N}$.
- A3. El zero no és el següent de cap nombre natural ($\forall x \in \mathbb{N}, 0 \neq s(x)$).
- A4. Si els següents de dos nombres naturals són iguals, aleshores els dos nombres són iguals ($s(x) = s(y) \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in \mathbb{N}$).
- A5. Principi d'inducció: si un subconjunt de nombres naturals A conté al zero i al següent de qualsevol nombre que pertanga a A, aleshores tot nombre natural pertany a A i per tant $A = \mathbb{N}$.

Una de les primeres conseqüències de l'A5 és el mètode de demostració anomenat d'inducció completa. Aquest mètode pot utilitzar-se per a provar que tot nombre natural satisfà una propietat P: segons dit axioma basta comprovar que l'1 la compleix i que si és certa per a n, ho és per al $s(n)$.

Com a conseqüència directa dels axiomes de Peano tenim els següents resultats:

- $\forall x, y \in \mathbb{N}, x \neq y \Rightarrow s(x) \neq s(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{N}, x \neq s(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\} \ \exists! \, y \in \mathbb{N} \ / \ x = s(y)$.

Aquest mètode ens permet introduir per recurrència en $\mathbb{N}$, com veurem en el pròxim apartat, dos operacions a les que anomenem respectivament suma i producte i l'utilitzarem per demostrar les seues propietats.

2. <u>EL SEMIANELL ORDENAT $\mathbb{N}$</u>

a. Suma en $\mathbb{N}$

Definim la suma de nombres naturals com l'aplicació donada per:

$$+ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

Tal que:

1) $x + 0 = x$
2) $x + s(y) = s(x + y)$

Vegem ara les propietats que compleix aquesta operació:

- + és una <u>operació interna</u>, és a dir, que $\forall x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$.
  Demostració: per inducció sobre y, fixat x.
  Si $y = 0$: $x + 0 = x \in \mathbb{N}$
  Suposem que $x + y \in \mathbb{N}$, vegem que $s(x + y) \in \mathbb{N}$. Per definició de $\mathbb{N}$, en concret per l'axioma 2, açò és cert.

- <u>Associativa</u>: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \ (x + y) + z = x + (y + z)$.
  Demostració: Fixats x i y, ho provem per inducció sobre z.
  Si $z = 0$ es compleix, doncs $(x + y) + 0 = x + y$
  $$x + (y + 0) = x + y$$
  Si per a z és cert, veiem que també ho és per a $s(z)$.
  $(x + y) + s(z) = s((x + y) + z)$ per definició de suma.

$s\big((x+y)+z\big) = s(x+(y+z))$ per hipòtesi d'inducció.
$s\big(x+(y+z)\big) = x+s(y+z) = x+(y+s(z))$ per definició de suma.

- Existència d'<u>element neutre</u>: $\exists\, 0 \in \mathbb{N} \,/\, x+0 = x = 0+x \;\; \forall x \in \mathbb{N}$.
  Demostració: per la definició de suma, $x+0=x$
  Vegem que $0+x=x$. Per inducció.
  Si $x=0$, $0+0=0$
  Si és cert per a x, vegem que ho és per a $s(x)$:
  $0+s(x) = s(0+x)$ per definició de suma.
  $s(0+x) = s(x)$ per hipòtesi d'inducció.

- <u>Commutativa</u>: $\forall x,y \in \mathbb{N},\; x+y=y+x$.
  Abans de demostrar aquesta propietat, vegem la següent nota.
  Nota: com $x+0=x$, $s(x)=s(x+0)=x+s(0)$. Si anomenem $1=s(0)$ tenim que $s(x)=x+1$.
  Vegem ara la demostració de la propietat commutativa.
  Demostració: fixat x, ho provem per inducció sobre y.
  Si $y=0, x+0=0+x$.
  Si és cert per a $y=1$ $(x+1=1+x)$, vegem que ho és per a $s(1)$:
  $$x+s(1) = x+(1+1) = (x+1)+1 = (1+x)+1 =$$
  $$= 1+(x+1) = 1+(1+x) = (1+1)+x = s(1)+x$$

  Si és cert per a y $(x+y=y+x)$, vegem que ho és per a $s(y)$:
  $$x+s(y) = x+(y+1) = (x+y)+1 = (y+x)+1 =$$
  $$= y+(x+1) = y+(1+x) = (y+1)+x = s(y)+x$$

- Cap nombre natural, excepte el zero, té <u>simètric</u>: si $x+y=0 \;\Rightarrow x=y=0$.
  Demostració: raonem per reducció a l'absurd. Siga $x+y=0$ amb $y \neq 0$. Com $y \neq 0$, per la conseqüència III dels axiomes de Peano, $\exists z \in \mathbb{N} \,/\, y=s(z)=z+1$.
  Aleshores $x+y=0 \Rightarrow x+z+1=0 \Rightarrow s(x+z)=0$. Contradicció amb l'axioma 3.

- Si $x+z=y+z \;\Rightarrow x=y \;\forall x,y,z \in \mathbb{N}$
  Demostració: per inducció sobre z.
  Si $z=0$, és evident.
  Suposem que $x+z=y+z$ implica que $x=y$. Vegem que es compleix per a $s(z)$:
  Si $x+s(z)=y+s(z) \Rightarrow s(x+z)=s(y+z) \Rightarrow x+z=y+z \;\Rightarrow x=y$

Aleshores $(\mathbb{N},+)$ és un semigrup abelià amb element neutre 0.

b. Producte en $\mathbb{N}$

Definim el producte de nombres naturals com l'aplicació donada per:

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x,y) \mapsto x \cdot y$$

Tal que:

1) $x \cdot 0 = 0$
2) $x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

Vegem ara les propietats que compleix aquesta operació:

- $\cdot$ és una <u>operació interna</u>, és a dir, que $\forall x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$.
  Demostració: per inducció sobre y, fixat x.
  Si $y = 0$: $x \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$
  Suposem que $x \cdot y \in \mathbb{N}$, vegem que $s(x \cdot y) \in \mathbb{N}$. Per definició de $\mathbb{N}$, en concret per l'axioma 2, açò és cert.

- <u>Distributiva</u> de $\cdot$ respecte de + : $\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  Demostració: provem una d'elles per inducció, l'altra és anàloga.
  Si $z = 0$ es compleix, doncs $x \cdot (y + 0) = x \cdot y = x \cdot y + 0 = x \cdot y + x \cdot 0$
  Si per a z és cert $(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$, vegem que ho és per a $s(z)$:
  $$x \cdot \big(y + s(z)\big) = x \cdot s(y + z) = x \cdot (y + z) + x = x \cdot y + x \cdot z + x = x \cdot y + x \cdot s(z)$$

- <u>Associativa</u>: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  Demostració: Fixats x i y, ho provem per inducció sobre z.
  Si $z = 0$ es compleix, doncs $(x \cdot y) \cdot 0 = 0 = x \cdot 0 = x \cdot (y \cdot 0)$
  Si per a z és cert $((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$, vegem que ho és per a $s(z)$:
  $$(x \cdot y) \cdot s(z) = (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y = x \cdot (y \cdot z + y) = x \cdot (y \cdot s(z))$$

- Existència d'<u>element neutre</u>: $\forall x \in \mathbb{N},\ x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
  Demostració: $x \cdot 1 = x \cdot s(0) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x$
  Vegem $1 \cdot x = x$ per inducció:
  Si $x = 0$, $1 \cdot 0 = 0$
  Suposem $1 \cdot x = x$, vegem $1 \cdot s(x) = s(x)$
  $$1 \cdot s(x) = 1 \cdot x + 1 = x + 1 = s(x)$$

- Existència d'<u>element absorbent</u>: $\forall x \in \mathbb{N},\ 0 \cdot x = 0$
  Demostració: per inducció sobre x.
  Si $x = 0$, $0 \cdot 0 = 0$
  Suposem $0 \cdot x = 0$, vegem $0 \cdot s(x) = 0$:
  $$0 \cdot s(x) = 0 \cdot x + 0 = 0 + 0 = 0$$

- <u>Commutativa</u>: $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x \cdot y = y \cdot x$
  Demostració: per inducció sobre y.
  Si $y = 0$, $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$
  Si es compleix per a y $(x \cdot y = y \cdot x)$, vegem que es compleix per a $s(y)$:
  $$x \cdot s(y) = x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x \cdot 1 = y \cdot x + 1 \cdot x = (y + 1) \cdot x = s(y) \cdot x$$

- En $\mathbb{N}$ no hi ha <u>divisors de zero</u>: $x \cdot y = 0 \ \Rightarrow x = 0 \ \ o \ \ y = 0$.
  Demostració: per reducció a l'absurd. Siga $x \cdot y = 0$ amb $x \cdot y \neq 0$. Com $y \neq 0$, $\exists z \in \mathbb{N}\ /\ y = s(z) = z + 1$. Aleshores $x \cdot y = 0 \rightarrow x \cdot (z + 1) = x \cdot z + x = 0 \rightarrow x = 0$

- Cap nombre natural, excepte l'1, té <u>simètric</u>: si $x \cdot y = 1 \ \Rightarrow x = y = 1$
  Demostració: per reducció a l'absurd. Siga $x \cdot y = 1$ amb $x, y \neq 1$. Siguen $t, v \in \mathbb{N}\ /\ x = t + 1$ i $y = v + 1$.
  $$1 = x \cdot y = x \cdot (v + 1) = x \cdot v + x \cdot 1 = x \cdot v + x = x \cdot v + t + 1 = 1$$
  Per l'axioma 4, $x \cdot v + t = 0$, i com cap nombre natural excepte el zero té simètric per a la suma, tenim que $x \cdot v = 0 = t \ \ \Rightarrow \ \ x = 1 \ \ i \ \ y = 1$.

- Si $z \neq 0$, $x \cdot z = y \cdot z \;\Rightarrow\; x = y$
  Demostració: Si $z = 1$ és cert, doncs $x \cdot 1 = y \cdot 1 \;\Rightarrow\; x = y$
  Suposem que $x \cdot z = y \cdot z \;\Rightarrow x = y$. Vegem que $x \cdot s(z) = y \cdot s(z) \Rightarrow x = y$
  $$x \cdot s(z) = y \cdot s(z) \Rightarrow x \cdot z + x = y \cdot z + y \;\Rightarrow x \cdot z + z = x \cdot z + y \;\Rightarrow x = y$$

Aleshores $(\mathbb{N},\cdot)$ és un semigrup abelià amb element neutre 1 y $(\mathbb{N},+,\cdot)$ és un semianell abelià.

c. Ordre en $\mathbb{N}$

Donats dos nombres naturals x i y, diem que x és menor o igual que y, i ho denotarem per $x \leq y$ sii $\exists a \in \mathbb{N} \,/\, x + a = y$. Diem també que y és major o igual que x i ho denotem per $y \geq x$. Per expressar que x és menor estricte que y escriurem $x < y$.

Anem a veure que la relació binària "ser menor o igual que" és una relació d'ordre total:

- Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{N}, x \leq x$
  Demostració: es compleix ja que $\exists\, 0 \in \mathbb{N} \,/\, x + 0 = x$

- Antisimètrica: $\forall x, y \in \mathbb{N}$, si $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
  Demostració: Com $x \leq y,\ \exists a \in \mathbb{N} \,/\, x + a = y$, i com $y \leq x,\ \exists b \in \mathbb{N} \,/\, y + b = x$.
  Així, $x + a = y \Rightarrow y + b + a = y \Rightarrow b + a = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow x = y$

- Transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, si $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
  Demostració: Com $x \leq y,\ \exists a \in \mathbb{N} \,/\, x + a = y$, i com $y \leq z,\ \exists b \in \mathbb{N} \,/\, y + b = z$.
  Així, $x + a = y \Rightarrow x + a + b = z \Rightarrow \exists a + b \in \mathbb{N} \,/\, x + a + b = z \Rightarrow x \leq z$

Amb les propietats anteriors tenim demostrat que $\leq$ és una relació d'ordre. Vegem que és d'ordre total:

- $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq y$ o $y \leq x$
  Demostració: fixem y, i provem per inducció sobre x.
  Si $x = 0$ es compleix, doncs $0 \leq y\ \forall y \in \mathbb{N}$
  Suposem que es compleix que $y \leq x$, és a dir, que $\exists a \in \mathbb{N} \;/\; y + a = x$. Aleshores
  $$x + 1 = y + a + 1 \Rightarrow y \leq x + 1 \Rightarrow y \leq s(x)$$
  Suposem ara que tenim el cas contrari, $x \leq y$, és a dir, que $\exists a \in \mathbb{N} \,/\, x + a = y$. Podem suposar $x \neq y$ ja que el cas $x = y$ està inclòs en el cas anterior. Aleshores $a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \;/\; b + 1 = a \Rightarrow x + b + 1 = y \Rightarrow x + 1 \leq y \Rightarrow s(x) \leq y$

Així, $\leq$ és d'ordre total i direm que $(\mathbb{N}, \leq)$ és totalment ordenat.

d. Divisió en $\mathbb{N}$

Vegem ara amb la següent proposició com dividir nombres naturals. Necessitarem açò per al teorema fonamental de la numeració que veurem en l'apartat 3.

Teorema: siga $y \in \mathbb{N}^*$. Per a cada $x \in \mathbb{N}\ \exists!\, q, r \in \mathbb{N} \;\;/\; x = q \cdot y + r$, con $r < y$. A q se li anomena quocient de la divisió de x entre y i a r, residu.

Demostració: ho provem per inducció sobre x.
Si $x = 0$, hi ha prou amb prendre $q = r = 0$.
Suposem que $\exists q, r \in \mathbb{N} \,/\, x = q \cdot y + r, r < y$. Vegem que es compleix per a $s(x)$.
Com $x = q \cdot y + r \Rightarrow s(x) = q \cdot y + s(r)$
Pot passar que:

1) $s(r) < y$, i ja ho tindríem,

2) $s(r) = y \Rightarrow s(x) = q \cdot y + y = (q+1) \cdot y + 0$ i per tant $s(x)$ ho verifica.

Hem provat l'existència. Provem ara la unicitat.

Suposem que $\exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ / $q_1 \cdot y + r_1 = x = q_2 \cdot y + r_2$, amb $r_1, r_2 < y$. Volem veure que $r_1 = r_2$ i $q_1 = q_2$.

Suposem $r_1 < r_2 \Rightarrow q_2 < q_1$. Aleshores

$$q_2 + 1 \leq q_1 \Rightarrow q_2 \cdot y + y \leq q_1 \cdot y \Rightarrow q_2 \cdot y + r_2 = q_1 \cdot y + r_1 \geq q_2 \cdot y + y + r_1 \Rightarrow r_2 \geq y + r_1 \geq y \ \#$$

Així, $r_1 = r_2$ i per tant $q_1 \cdot y = q_2 \cdot y \Rightarrow q_1 = q_2$.

3. SISTEMES DE NUMERACIÓ

a. Definició

Els sistemes de numeració antics eren additius. Aquests sistemes presenten dos desavantatges principals: el primer és que, a mesura que els nombres es fan més grans, es necessiten cada vegada més símbols i el segon, i de major importància, és que les operacions amb aquests nombres es fan summament difícils i quedaven reservades als especialistes.

D'altra banda, la invenció de la notació posicional, on el valor dels signes depenen de la posició que ocupen dins de l'estructura, facilita els càlculs i a més els nombres són expressats utilitzant un xicotet conjunt de símbols, anomenats dígits; que en el nostre sistema decimal són els nombres aràbics. 0,1....9. L'ús del deu com a base està íntimament lligat al fet físic de tindre deu dits per a comptar.

No obstant això, hi ha lèxic en altres llengües que mostren vestigis d'altres bases com la base 20. Els astrònoms babilònics utilitzaven la base 60, que hui dia roman vigent en el còmput del temps i en la mesura de graus. Des d'un punt de vista teòric, el sistema posicional de base 2 destaca com aquell amb la menor base possible, sent els seus únics dígits el 0 i el 1, però posseeix el desavantatge de la longitud de les seues expressions per a representar nombres xicotets. Hui en dia és molt important, ja que s'utilitza en computació.

b. Teorema fonamental de la numeració. Propietats

La representació escrita dels nombres naturals es fonamenta en el fet en el que tot nombre natural es pot expressar com a combinació lineal de potències de la base elegida, com ens mostra el següent resultat.

Teorema fonamental de la numeració: donada una base b $(b \in \mathbb{N}, b > 1)$, tot nombre natural $x \in \mathbb{N}$ pot expressar-se de forma única como:

$x = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_k b^k$, amb $r_i \in \mathbb{N}$, $r_i < b \ \forall i = 0, \ldots, k$

Demostració: Si $x < b$, prendríem $r_0 = x$ i $r_i = 0 \ \forall i \neq 0$

Suposem que $x \geq b$. Dividim x entre b. Si el quocient $q_1 \geq b$, dividim q_1 entre b i així successivament fins obtindre un quocient menor que b. S'obté que:

$$x = q_1 b + r_0, \ \ r_0 < b$$
$$q_1 = q_2 b + r_1, \ \ r_1 < b$$
$$q_2 = q_3 b + r_2, \ \ r_2 < b$$
$$\ldots$$
$$q_{k-1} = q_k b + r_{k-1}, \ \ r_{k-1} < b$$
$$q_k = r_k, \ \ r_k < b$$

Açò és possible doncs $q_1 > q_2 > q_3 > \cdots$

Així $x = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_k b^k$ y tenim provada l'existència. Provem ara la unicitat.

Suposem que $\exists s_j \in \mathbb{N}$, $s_j < b \ \forall j = 0, \ldots, l$, tals que $r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_k b^k = s_0 + s_1 b + s_2 b^2 + \cdots + s_l b^l$.

Si $k < l$, tindríem que:

$$r_0 + r_1 b + \cdots + r_k b^k \leq (b-1)\left(1 + b + \cdots + b^k\right) = b^{k+1} - 1 < b^l \leq s_0 + s_1 b + \cdots + s_l b^l$$

Que és una contradicció, amb la qual cosa $k = l$ i

$$x = r_0 + r_1 b + \cdots + r_k b^k = s_0 + s_1 b + \cdots + s_k b^k = r_0 + \left(r_1 + r_2 b + \cdots + r_k b^{k-1}\right) b =$$
$$= s_0 + \left(s_1 + s_2 b + \cdots + s_k b^{k-1}\right) b$$

On ambdues expressions coincideixen amb la divisió de x entre b. Per unicitat del quocient i el residu, $r_0 = s_0$ i $r_1 + r_2 b + \cdots + r_k b^{k-1} = s_1 + s_2 b + \cdots + s_k b^{k-1}$. Reiterant el procés obtenim que $r_i = s_i \ \forall i = 0, \ldots, k$.

A aquesta expressió l'anomenem expressió polinòmica del nombre x en base b.

A partir del resultat anterior podem extraure les següents <u>propietats</u> de la numeració:

1) Els nombres $b, b^2, b^3, \ldots$ s'expressen, respectivament, en el sistema de base b, per $10, 100, 1000 \ldots$
2) Un nombre x en base b té r xifres si i sols si $b^{r-1} \leq x < b^r$
3) Si $x, y \in \mathbb{N}$ / $x_{b)}$ té r xifres i $y_{b)}$ té s xifres amb $s < r$, aleshores $y < x$. (El nombre amb més xifres és major).
4) Si $x_{b)}$ i $y_{b)}$ tenen el mateix nombre de xifres, aleshores $x > y$ si la primera xifra de x distinta de y (començant per l'esquerra) és major que aquesta.

c. Canvis de base

Hi ha ocasions en les que ens és necessari canviar d'un sistema de numeració a altre. Vegem com passar un nombre de base b a base b':

- Passar de base b a base $b' = 10$.
  Per a passar $x_{b)}$ a base 10 és suficient amb emprar la seua expressió polinòmica i fer les operacions en base 10.
  Exemple: $123_{4)} = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27_{10)}$

- Passar de base $b = 10$ a base b'.
  Per a passar $x_{10)}$ a base b' podem dur a terme el mètode de divisió successiva utilitzat en la demostració del teorema fonamental de la numeració, prenent per a l'expressió del nombre en base b' com a primera xifra de l'esquerra l'últim quocient i a continuació la successió dels residus en ordre invers.
  Exemple: $27_{10)} = 123_{4)}$

  $$\begin{array}{l|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \;|\; 4 \\ \hline & 2 \quad 1 \end{array}$$

- Passar de base $b \neq 10$ a base $b' \neq 10$
  Per a fer-ho hi ha prou amb combinar els procediments anteriors, passant de base b a base 10 i després de base 10 a base b'.
  Exemple: $123_{4)} = 27_{10)} = 102_{5)}$

  $$\begin{array}{l|l} 27 & 5 \\ \hline 2 & 5 \;|\; 5 \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

CONCLUSIÓ

Acabem ací el tema 1, havent desenvolupat els apartats que ens exigia el títol del mateix. En el desenvolupament del tema hem vist que $(\mathbb{N},+)$ és un semigrup abelià amb element neutre 0. Necessitarem ampliar $\mathbb{N}$ a un conjunt que complisca que tot element que conté tinga simètric per a la suma. Serà el conjunt dels enters, $\mathbb{Z}$, i $(\mathbb{Z},+)$ serà grup abelià. ho veurem en el tema 4.

La noció de nombre natural apareix en tots els cursos de l'educació secundària i batxillerat, donat que és un element principal en el coneixement matemàtic. En concret, en la LOMLOE queda recollit el seu estudi en el bloc de sentit numèric i de les operacions, donat que en aquest bloc es treballa el conjunt de sabers bàsics relacionats amb la comprensió i significat de nombre, la seua natura, representació, simbolització i el seu ús en les relacions, propietats, operacions i estratègies del càlcul.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- De Guzmán, M., Rubio, B. Análisis matemático. Ed Pirámide, Madrid 1990.
- Norman L. Biggs. Matemática discreta. Ed. Vicens Vives, Barcelona 1994.
- K.H. Rosen. Matemática discreta y sus aplicaciones. Ed. Mc Graw Hill, Madrid 2004.
- Peano G. Arithmetices principia, nova methodo exposita.
- Llei Orgànica 3/2020, de 29 de desembre, per la qual es modifica la Llei Orgànica 2/2006, de 3 de maig, d'Educació (LOMLOE).
- Reial Decret 217/2022, de 29 de març, pel qual s'estableix l'ordenació i els ensenyaments mínims de l'Educació Secundària Obligatòria.
- Reial Decret 243/2022, de 5 d'abril, pel qual s'estableixen l'ordenació i els ensenyaments mínims del Batxillerat.