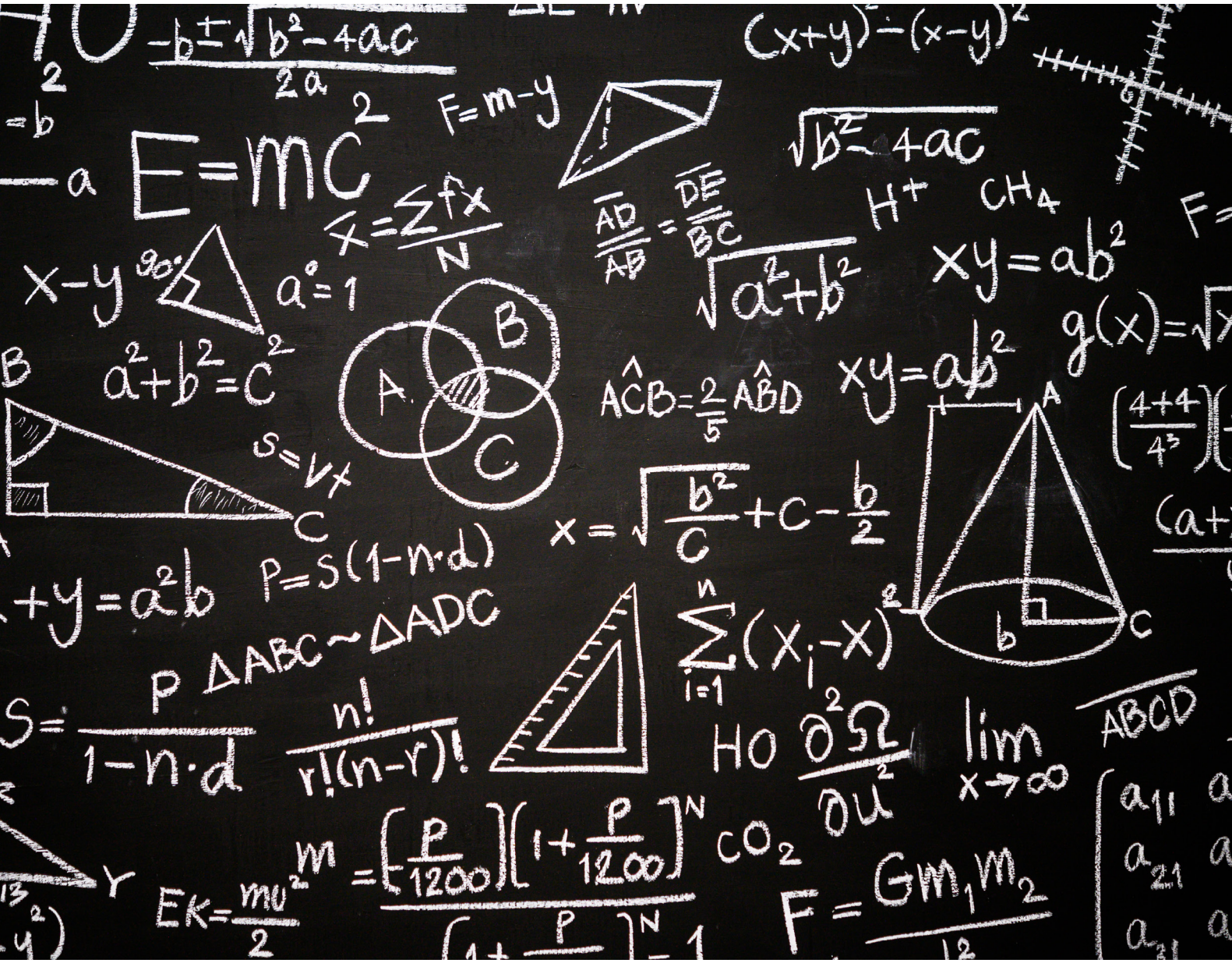
Temario de oposiciones

MATEMÁTICAS I

Carolina Liern Pérez



educàlia editorial

Temario de opociones

MATEMÁTICAS I

Carolina Liern Pérez

educàlia
editorial

Edición, 2022. Revisado en 2024

Autora: Carolina Liern Pérez

Edita: Educàlia Editorial

Imprime: Grupo Digital 82, S. L.

ISBN: 978-84-18777-94-3

Depósito Legal: V-2499-2022

Printed in Spain / Impress en España.

Todos los derechos reservados. No está permitida la reimpresión de ninguna parte de este libro, ni de imágenes ni de texto, ni tampoco su reproducción, ni utilización, en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico o de otro modo, tanto conocida como los que puedan inventarse, incluyendo el fotocopiado o grabación, ni está permitido almacenarlo en un sistema de información y recuperación, sin el permiso anticipado y por escrito del editor.
Alguna de las imágenes que incluye este libro son reproducciones que se han realizado acogiéndose al derecho de cita que aparece en el artículo 32 de la Ley 22/1987, de 11 de noviembre, de la Propiedad intelectual. Educalia Editorial agradece a todas las instituciones, tanto públicas como privadas, citadas en estas páginas, su colaboración y pide disculpas por la posible omisión involuntaria de algunas de ellas.

Educàlia Editorial

Avda. de las Jacarandas 2 loft 327 46100 Burjassot-València

Tel. 960 624 309 - 963 768 542 - 610 900 111

Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com

www.e-ducalia.com

TEMA 1. NÚMERO NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

TEMA 2. FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS. DIAGRAMAS EN ÁRBOL

TEMA 3. TÉCNICAS DE RECUENTO. COMBINATORIA

TEMA 4. NÚMEROS ENTEROS. DIVISIBILIDAD. NÚMERO PRIMOS. CONGRUENCIAS.

TEMA 5. NÚMEROS RACIONALES.

TEMA 6. NÚMEROS REALES. TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

TEMA 7. APROXIMACIÓN DE NÚMEROS. ERRORES. NOTACIÓN CIENTÍFICA

TEMA 8. SUCESIONES. TÉRMINO GENERAL Y FORMA RECURRENTE. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS. APLICACIONES.

TEMA 9. NUMEROS COMPLEJOS. APLICACIONES GEOMÉTRICAS.

TEMA 10. SUCESIVAS AMPLAICIONES DEL CONCEPTO DE NÚMERO. EVOLUCIÓN HISTÓRICA Y PROBLEMAS QUE RESUELVE CADA UNA.

TEMA 11. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.

TEMA 12. ESPACIOS VECTORIALES. VARIEDAD LINEALES. APLICACIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES. TEOREMA DE ISOMORFÍA.

TEMA 13. POLINOMIOS. OPERACIONES. FÓRMUAL DE NEWTON. DIVISIVILIDAD DE POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS.

TEMA 14. ECUACIONES. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE RAÍCES.

TEMA 15. ECUACIONES DIOFÁNTICAS.

TEMA 16. DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. TEOREMA DE ROUCHÉ. REGLA DE CRAMES. MÉTODO DE GAUSS-JORDA.

TEMA 17. PROGRAMACIÓN LINEAL. APLICACIONES.

TEMA 18. MATRICES. ÁLGEBRAS DE MATRICES. APLICACIONES AL CAMPO DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA NATURALEZA.

TEMA 19. DETERMINANTES. PROPIEDADES. APLICACIÓN AL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.

TEMA 20. EL LENGUAJE ALGEBRAICO. SÍMBOLOS Y NÚMEROS. IMPORTANCIA DE SU DESARROLLO Y PROBLEMAS QUE RESUELVE. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA.

TEMA 21. FUNCIONES REALES DE VARIALE REAL. FUNCIONES ELEMENTALES. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

TEMA 22. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

TEMA 23. FUNCIONES CIRCULARES E HIPERBÓLICAS Y SUS RECÍPROCAS. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

TEMA 24. FUNCIONES DADAS EN FORMA DE TABLA. INTERPOLACIÓN POLINÍMICA. INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN DE DATOS.

TEMA 1

NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

0. INTRODUCCIÓN
1. AXIOMÁTICA DEL NÚMERO NATURAL
   a. Axiomas de Peano
2. EL SEMIANILLO ORDENADO N
   a. Suma en N
   b. Producto en N
   c. Orden en N
   d. División en N
3. SISTEMAS DE NUMERACIÓN
   a. Definición
   b. Teorema fundamental de la numeración. Propiedades
   c. Cambios de base

CONCLUSIÓN
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

0. INTRODUCCIÓN

Tuvo que pasar mucho tiempo hasta que la humanidad aprendiera a representar con el mismo símbolo un conjunto formado por seis caballos y otro por seis manzanas. Se fue descubriendo que los números servían para contar y comparar cosas, y más adelante para hacer operaciones con ellos y para medir. Con todo esto surgió la necesidad de la representación de los números y su organización en distintos sistemas de numeración.

La humanidad experimentalmente descubrió que la suma y el producto poseían la propiedad conmutativa o la asociativa. Así fue trazándose la aritmética como ciencia dedicada al estudio de los números y sus relaciones. La aritmética considera las propiedades generales de los números, haciendo abstracción de lo particular y concreto, pudiendo así aplicar sus conclusiones a casos generales.

En este tema desarrollaremos la construcción axiomática del conjunto de los números naturales, veremos las operaciones en dicho conjunto, la relación de orden que posee y los sistemas de numeración. Los conocimientos previos que necesitaremos para desarrollar este tema son los relativos a la divisibilidad (tema 4) y a las relaciones binarias (tema 11).

1. AXIOMÁTICA DEL NÚMERO NATURAL

La profunda revisión que sufrió la matemática en el siglo XIX comenzó con la fundamentación del concepto de número. El conjunto de los números naturales quedó establecido mediante un sistema axiomático y, a partir de él, se construyeron los conjuntos de números enteros, racionales, reales y complejos.

A continuación estudiaremos los axiomas sobre los que se basa la construcción de los números naturales.

a. Axiomas de Peano

Estos axiomas los estableció Peano a la sombra de la nueva teoría de conjuntos aparecida a finales del siglo XIX.

- A1. El cero es un número natural ($0 \in \mathbb{N}$).
- A2. A cada número natural $x \in \mathbb{N}$ le corresponde un único número natural llamado siguiente de x y al que denotamos por $s(x)$. Si $x \in \mathbb{N}$, $s(x) \in \mathbb{N}$.
- A3. El cero no es el siguiente de ningún número natural ($\forall x \in \mathbb{N}, 0 \neq s(x)$).
- A4. Si los siguientes de dos números naturales son iguales, entonces los dos números son iguales ($s(x) = s(y) \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in \mathbb{N}$).
- A5. Principio de inducción: si un subconjunto de números naturales A contiene al cero y al siguiente de cualquier número que pertenezca a A, entonces todo número natural pertenece a A y por tanto $A = \mathbb{N}$.

Una de las primeras consecuencias del A5 es el método de demostración llamado de inducción completa. Este método puede usarse para probar que todo número natural satisface una propiedad P: según dicho axioma basta comprobar que el 1 la cumple y que si es cierta para n lo es para el $s(n)$.

Como consecuencia directa de los axiomas de Peano tenemos los siguientes resultados:

- $\forall x, y \in \mathbb{N}, x \neq y \Rightarrow s(x) \neq s(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{N}, x \neq s(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\} \ \exists! \, y \in \mathbb{N} \ / \ x = s(y)$.

Este método nos permite introducir por recurrencia en $\mathbb{N}$, como veremos en el próximo apartado, dos operaciones a las que llamaremos respectivamente suma y producto y lo utilizaremos para demostrar sus propiedades.

2. <u>EL SEMIANILLO ORDENADO $\mathbb{N}$</u>

a. Suma en $\mathbb{N}$

Definimos la suma de números naturales como la aplicación dada por:

$$+ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

Tal que:

1) $x + 0 = x$
2) $x + s(y) = s(x + y)$

Veamos ahora las propiedades que cumple esta operación:

- + es una <u>operación interna</u>, es decir, que $\forall x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$.
  Demostración: por inducción sobre y, fijado x.
  Si $y = 0$: $x + 0 = x \in \mathbb{N}$
  Suponemos que $x + y \in \mathbb{N}$, veamos que $s(x + y) \in \mathbb{N}$. Por definición de $\mathbb{N}$, en concreto por el axioma 2, esto es cierto.

- <u>Asociativa</u>: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \ (x + y) + z = x + (y + z)$.
  Demostración: Fijados x e y, lo probamos por inducción sobre z.
  Si $z = 0$ se cumple, pues $(x + y) + 0 = x + y$
  $x + (y + 0) = x + y$
  Si para z es cierto, veamos que también lo es para $s(z)$.
  $(x + y) + s(z) = s((x + y) + z)$ por definición de suma.

$s\big((x+y)+z\big) = s(x+(y+z))$ por hipótesis de inducción.
$s\big(x+(y+z)\big) = x+s(y+z) = x+(y+s(z))$ por definición de suma.

- Existencia de <u>elemento neutro</u>: $\exists\, 0 \in \mathbb{N}$ / $x+0 = x = 0+x \;\; \forall x \in \mathbb{N}$.
  Demostración: por la definición de suma, $x+0=x$
  Veamos que $0+x=x$. Por inducción.
  Si $x=0$, $0+0=0$
  Si es cierto para x, veamos que lo es para $s(x)$:
  $0+s(x) = s(0+x)$ por definición de suma.
  $s(0+x) = s(x)$ por hipótesis de inducción.

- <u>Conmutativa</u>: $\forall x,y \in \mathbb{N},\; x+y=y+x$.
  Antes de demostrar esta propiedad, veamos la siguiente nota.
  Nota: como $x+0=x,\; s(x)=s(x+0)=x+s(0)$. Si llamamos $1=s(0)$ tenemos que $s(x)=x+1$.
  Veamos ahora la demostración de la propiedad conmutativa.
  Demostración: fijado x, lo probamos por inducción sobre y.
  Si $y=0, x+0=0+x$.
  Si es cierto para $y=1\;\; (x+1=1+x)$, veamos que lo es para $s(1)$:
  $$x+s(1) = x+(1+1) = (x+1)+1 = (1+x)+1 =$$
  $$= 1+(x+1) = 1+(1+x) = (1+1)+x = s(1)+x$$

  Si es cierto para y $(x+y=y+x)$, veamos que lo es para $s(y)$:
  $$x+s(y) = x+(y+1) = (x+y)+1 = (y+x)+1 =$$
  $$= y+(x+1) = y+(1+x) = (y+1)+x = s(y)+x$$

- Ningún número natural, salvo el cero, tiene <u>simétrico</u>: si $x+y=0 \;\Rightarrow x=y=0$.
  Demostración: razonamos por reducción al absurdo. Sea $x+y=0$ con $y \neq 0$. Como $y \neq 0$, por la consecuencia III de los axiomas de Peano, $\exists z \in \mathbb{N}$ / $y=s(z)=z+1$.
  Entonces $x+y=0 \Rightarrow x+z+1=0 \Rightarrow s(x+z)=0$. Contradicción con el axioma 3.

- Si $x+z=y+z \;\Rightarrow x=y \;\forall x,y,z \in \mathbb{N}$
  Demostración: por inducción sobre z.
  Si $z=0$, es evidente.
  Suponemos que $x+z=y+z$ implica que $x=y$. Veamos que se cumple para $s(z)$:
  Si $x+s(z)=y+s(z) \Rightarrow s(x+z)=s(y+z) \Rightarrow x+z=y+z \;\Rightarrow x=y$

Entonces $(\mathbb{N},+)$ es un semigrupo abeliano con elemento neutro 0.

b. Producto en $\mathbb{N}$

Definimos el producto de números naturales como la aplicación dada por:

$$\cdot : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x,y) \mapsto x\cdot y$$

Tal que:

1) $x\cdot 0 = 0$
2) $x\cdot s(y) = x\cdot y + x$

Veamos ahora las propiedades que cumple esta operación:

- $\cdot$ es una <u>operación interna</u>, es decir, que $\forall x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$.
  Demostración: por inducción sobre y, fijado x.
  Si $y = 0$: $x \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$
  Suponemos que $x \cdot y \in \mathbb{N}$, veamos que $s(x \cdot y) \in \mathbb{N}$. Por definición de $\mathbb{N}$, en concreto por el axioma 2, esto es cierto.

- <u>Distributiva</u> de $\cdot$ respecto de + : $\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  Demostración: probamos una de ellas por inducción, la otra es análoga.
  Si $z = 0$ se cumple, pues $x \cdot (y + 0) = x \cdot y = x \cdot y + 0 = x \cdot y + x \cdot 0$
  Si para z es cierto $(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$, veamos que lo es para $s(z)$:
  $$x \cdot \big(y + s(z)\big) = x \cdot s(y + z) = x \cdot (y + z) + x = x \cdot y + x \cdot z + x = x \cdot y + x \cdot s(z)$$

- <u>Asociativa</u>: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  Demostración: Fijados x e y, lo probamos por inducción sobre z.
  Si $z = 0$ se cumple, pues $(x \cdot y) \cdot 0 = 0 = x \cdot 0 = x \cdot (y \cdot 0)$
  Si para z es cierto $((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$, veamos que lo es para $s(z)$:
  $$(x \cdot y) \cdot s(z) = (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y = x \cdot (y \cdot z + y) = x \cdot (y \cdot s(z))$$

- Existencia de <u>elemento neutro</u>: $\forall x \in \mathbb{N},\ x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
  Demostración: $x \cdot 1 = x \cdot s(0) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x$
  Veamos $1 \cdot x = x$ por inducción:
  Si $x = 0$, $1 \cdot 0 = 0$
  Suponemos $1 \cdot x = x$, veamos $1 \cdot s(x) = s(x)$
  $$1 \cdot s(x) = 1 \cdot x + 1 = x + 1 = s(x)$$

- Existencia de <u>elemento absorbente</u>: $\forall x \in \mathbb{N},\ 0 \cdot x = 0$
  Demostración: por inducción sobre x.
  Si $x = 0$, $0 \cdot 0 = 0$
  Suponemos $0 \cdot x = 0$, veamos $0 \cdot s(x) = 0$:
  $$0 \cdot s(x) = 0 \cdot x + 0 = 0 + 0 = 0$$

- <u>Conmutativa</u>: $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x \cdot y = y \cdot x$
  Demostración: por inducción sobre y.
  Si $y = 0$, $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$
  Si se cumple para y $(x \cdot y = y \cdot x)$, veamos que se cumple para $s(y)$:
  $$x \cdot s(y) = x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x \cdot 1 = y \cdot x + 1 \cdot x = (y + 1) \cdot x = s(y) \cdot x$$

- En $\mathbb{N}$ no hay <u>divisores de cero</u>: $x \cdot y = 0 \ \Rightarrow x = 0 \ \ o \ \ y = 0$.
  Demostración: por reducción al absurdo. Sea $x \cdot y = 0$ con $x \cdot y \neq 0$. Como $y \neq 0$, $\exists z \in \mathbb{N}$ / $y = s(z) = z + 1$. Entonces $x \cdot y = 0 \rightarrow x \cdot (z + 1) = x \cdot z + x = 0 \rightarrow x = 0$

- Ningún número natural, salvo el 1, tiene <u>simétrico</u>: si $x \cdot y = 1 \ \Rightarrow x = y = 1$
  Demostración: por reducción al absurdo. Sea $x \cdot y = 1$ con $x, y \neq 1$. Sean $t, v \in \mathbb{N}$ / $x = t + 1$ e $y = v + 1$.
  $$1 = x \cdot y = x \cdot (v + 1) = x \cdot v + x \cdot 1 = x \cdot v + x = x \cdot v + t + 1 = 1$$
  Por el axioma 4, $x \cdot v + t = 0$, y como ningún número natural salvo el cero tiene simétrico para la suma tenemos que $x \cdot v = 0 = t \ \ \Rightarrow \ \ x = 1 \ \ e \ \ y = 1$.

- Si $z \neq 0$, $x \cdot z = y \cdot z \;\Rightarrow\; x = y$
  Demostración: Si $z = 1$ es cierto, pues $x \cdot 1 = y \cdot 1 \;\Rightarrow\; x = y$
  Supongamos que $x \cdot z = y \cdot z \;\Rightarrow x = y$. Veamos que $x \cdot s(z) = y \cdot s(z) \Rightarrow x = y$
  $$x \cdot s(z) = y \cdot s(z) \Rightarrow x \cdot z + x = y \cdot z + y \;\Rightarrow x \cdot z + z = x \cdot z + y \;\Rightarrow x = y$$

Entonces $(\mathbb{N},\cdot)$ es un semigrupo abeliano con elemento neutro 1 y $(\mathbb{N},+,\cdot)$ es un semianillo abeliano.

c. Orden en $\mathbb{N}$

Dados dos números naturales x e y, diremos que x es menor o igual que y, y lo denotaremos por $x \leq y$ sii $\exists a \in \mathbb{N} \;/\; x + a = y$. Decimos también que y es mayor o igual que x y lo denotamos por $y \geq x$. Para expresar que x es menor estricto que y escribiremos $x < y$.

Vamos a ver que la relación binaria "ser menor o igual que" es una relación de orden total:

- Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{N}, x \leq x$
  Demostración: se cumple ya que $\exists\, 0 \in \mathbb{N} \;/\; x + 0 = x$

- Antisimétrica: $\forall x, y \in \mathbb{N}$, si $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
  Demostración: Como $x \leq y,\; \exists a \in \mathbb{N} \;/\; x + a = y$, y como $y \leq x,\; \exists b \in \mathbb{N} \;/\; y + b = x$.
  Así, $x + a = y \Rightarrow y + b + a = y \Rightarrow b + a = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow x = y$

- Transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, si $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
  Demostración: Como $x \leq y,\; \exists a \in \mathbb{N} \;/\; x + a = y$, y como $y \leq z,\; \exists b \in \mathbb{N} \;/\; y + b = z$.
  Así, $x + a = y \Rightarrow x + a + b = z \Rightarrow \exists a + b \in \mathbb{N} \;/\; x + a + b = z \Rightarrow x \leq z$

Con las propiedades anteriores tenemos demostrado que $\leq$ es una relación de orden. Veamos que es de orden total:

- $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq y$ o $y \leq x$
  Demostración: fijamos y, y probamos por inducción sobre x.
  Si $x = 0$ se cumple, pues $0 \leq y \;\forall y \in \mathbb{N}$
  Supongamos que se cumple que $y \leq x$, es decir, que $\exists a \in \mathbb{N} \;/\; y + a = x$. Entonces $x + 1 = y + a + 1 \Rightarrow y \leq x + 1 \Rightarrow y \leq s(x)$
  Supongamos ahora que tenemos el caso contrario, $x \leq y$, es decir, que $\exists a \in \mathbb{N} \;/\; x + a = y$. Podemos suponer $x \neq y$ ya que el caso $x = y$ está incluido en el caso anterior. Entonces $a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \;/\; b + 1 = a \Rightarrow x + b + 1 = y \Rightarrow x + 1 \leq y \Rightarrow s(x) \leq y$

Así, $\leq$ es de orden total y diremos que $(\mathbb{N}, \leq)$ es totalmente ordenado.

d. División en $\mathbb{N}$

Veamos ahora con la siguiente proposición cómo dividir números naturales. Necesitaremos esto para el teorema fundamental de la numeración que veremos en el apartado 3.

Teorema: sea $y \in \mathbb{N}^*$. Para cada $x \in \mathbb{N}\; \exists!\, q, r \in \mathbb{N} \;/\; x = q \cdot y + r$, con $r < y$. A q se le llama cociente de la división de x entre y y a r, resto.

Demostración: lo probamos por inducción sobre x.
Si $x = 0$, basta tomar $q = r = 0$.
Supongamos que $\exists q, r \in \mathbb{N} \;/\; x = q \cdot y + r, r < y$. Veamos que se cumple para $s(x)$.
Como $x = q \cdot y + r \Rightarrow s(x) = q \cdot y + s(r)$
Puede pasar que:

1) $s(r) < y$, y ya lo tendríamos,

2) $s(r) = y \Rightarrow s(x) = q \cdot y + y = (q+1) \cdot y + 0$ y por tanto $s(x)$ lo verifica.

Hemos probado la existencia. Probemos ahora la unicidad.

Supongamos que $\exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N} \ / \ q_1 \cdot y + r_1 = x = q_2 \cdot y + r_2$, con $r_1, r_2 < y$. Queremos ver que $r_1 = r_2$ y $q_1 = q_2$.

Suponemos $r_1 < r_2 \Rightarrow q_2 < q_1$. Entonces

$$q_2 + 1 \leq q_1 \Rightarrow q_2 \cdot y + y \leq q_1 \cdot y \Rightarrow q_2 \cdot y + r_2 = q_1 \cdot y + r_1 \geq q_2 \cdot y + y + r_1 \Rightarrow r_2 \geq y + r_1 \geq y \ \#$$

Así, $r_1 = r_2$ y por tanto $q_1 \cdot y = q_2 \cdot y \Rightarrow q_1 = q_2$.

3. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

a. Definición

Los sistemas de numeración antiguos eran aditivos. Estos sistemas presentan dos desventajas principales: la primera es que, a medida que los números se hacen más grandes, se necesitan cada vez más símbolos y la segunda, y de mayor importancia, es que las operaciones con dichos números se hacen sumamente difíciles y quedaban reservadas a los especialistas.

Por otra parte, la invención de la notación posicional, donde el valor de los signos dependen de la posición que ocupan dentro de la estructura, facilita los cálculos y además los números son expresados usando un pequeño conjunto de símbolos, llamados dígitos; que en nuestro sistema decimal son los números arábigos. 0,1....9. El uso del diez como base está íntimamente ligado al hecho físico de tener diez dedos para contar.

Sin embargo, hay léxico en otras lenguas que muestran vestigios de otras bases como la base 20. Los astrónomos babilónicos utilizaban la base 60, que hoy en día permanece vigente en el cómputo del tiempo y en la medida de grados. Desde un punto de vista teórico, el sistema posicional de base 2 se destaca como aquel con la menor base posible, siendo sus únicos dígitos el 0 y el 1, pero posee la desventaja de la longitud de sus expresiones para representar números pequeños. Hoy en día es muy importante, ya que se utiliza en computación.

b. Teorema fundamental de la numeración. Propiedades

La representación escrita de los números naturales se fundamenta en el hecho en el que todo número natural se puede expresar como combinación lineal de potencias de la base elegida, como nos muestra el siguiente resultado.

Teorema fundamental de la numeración: dada una base b ($b \in \mathbb{N}, b > 1$), todo número natural $x \in \mathbb{N}$ puede expresarse de forma única como:

$x = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_k b^k$, con $r_i \in \mathbb{N}$, $r_i < b \ \forall i = 0, \ldots, k$

Demostración: Si $x < b$, tomaríamos $r_0 = x$ y $r_i = 0 \ \forall i \neq 0$

Supongamos que $x \geq b$. Dividimos x entre b. Si el cociente $q_1 \geq b$, dividimos q_1 entre b y así sucesivamente hasta obtener un cociente menor que b. Se obtiene que:

$$x = q_1 b + r_0, \ \ r_0 < b$$
$$q_1 = q_2 b + r_1, \ \ r_1 < b$$
$$q_2 = q_3 b + r_2, \ \ r_2 < b$$
$$\ldots$$
$$q_{k-1} = q_k b + r_{k-1}, \ \ r_{k-1} < b$$
$$q_k = r_k, \ \ r_k < b$$

Esto es posible pues $q_1 > q_2 > q_3 > \cdots$

Luego $x = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_k b^k$ y tenemos probada la existencia. Probemos ahora la unicidad.

Supongamos que $\exists s_j \in \mathbb{N}$, $s_j < b\ \forall j = 0, \dots, l$, tales que $r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_k b^k = s_0 + s_1 b + s_2 b^2 + \cdots + s_l b^l$.

Si $k < l$, tendríamos que:

$$r_0 + r_1 b + \cdots + r_k b^k \leq (b-1)\left(1 + b + \cdots + b^k\right) = b^{k+1} - 1 < b^l \leq s_0 + s_1 b + \cdots + s_l b^l$$

Que es una contradicción, con lo que $k = l$ y

$$x = r_0 + r_1 b + \cdots + r_k b^k = s_0 + s_1 b + \cdots + s_k b^k = r_0 + \left(r_1 + r_2 b + \cdots + r_k b^{k-1}\right) b =$$
$$= s_0 + \left(s_1 + s_2 b + \cdots + s_k b^{k-1}\right) b$$

Donde ambas expresiones coinciden con la división de x entre b. Por unicidad del cociente y el resto, $r_0 = s_0$ y $r_1 + r_2 b + \cdots + r_k b^{k-1} = s_1 + s_2 b + \cdots + s_k b^{k-1}$. Reiterando el proceso obtenemos que $r_i = s_i\ \forall i = 0, \dots, k$.

A esta expresión la llamamos expresión polinómica del número x en base b.

A partir del resultado anterior podemos extraer las siguientes <u>propiedades</u> de la numeración:

1) Los números $b, b^2, b^3, \dots$ se expresan, respectivamente, en el sistema de base b, por $10, 100, 1000 \dots$
2) Un número x en base b tiene r cifras si y solo si $b^{r-1} \leq x < b^r$
3) Si $x, y \in \mathbb{N}$ / $x_{b)}$ tiene r cifras e $y_{b)}$ tiene s cifras con $s < r$, entonces $y < x$. (El número con más cifras es mayor).
4) Si $x_{b)}$ e $y_{b)}$ tienen el mismo número de cifras, entonces $x > y$ si la primera cifra de x distinta de y (empezando por la izquierda) es mayor que esta.

c. Cambios de base

Hay ocasiones en las que nos es necesario cambiar de un sistema de numeración a otro. Veamos cómo pasar un número de base b a base b':

- Pasar de base b a base $b' = 10$.
  Para pasar $x_{b)}$ a base 10 es suficiente con emplear su expresión polinómica y hacer las operaciones en base 10.
  Ejemplo: $123_{4)} = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27_{10)}$

- Pasar de base $b = 10$ a base b'.
  Para pasar $x_{10)}$ a base b' podemos llevar a cabo el método de división sucesiva utilizado en la demostración del teorema fundamental de la numeración, tomando para la expresión del número en base b' como primera cifra de la izquierda el último cociente y a continuación la sucesión de los restos en orden inverso.
  Ejemplo: $27_{10)} = 123_{4)}$

  $$\begin{array}{l|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \;|\; 4 \\ \hline & 2 \quad 1 \end{array}$$

- Pasar de base $b \neq 10$ a base $b' \neq 10$
  Para hacerlo basta combinar los procedimientos anteriores, pasando de base b a base 10 y luego de base 10 a base b'.
  Ejemplo: $123_{4)} = 27_{10)} = 102_{5)}$

  $$\begin{array}{l|l} 27 & 5 \\ \hline 2 & 5 \;|\; 5 \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

CONCLUSIÓN

Terminamos aquí el tema 1, habiendo desarrollado los apartados que nos exigía el título del mismo. En el desarrollo del tema hemos visto que $(\mathbb{N},+)$ es un semigrupo abeliano con elemento neutro 0. Necesitaremos ampliar $\mathbb{N}$ a un conjunto que cumple que todo elemento que contiene tenga simétrico para la suma. Será el conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$, y $(\mathbb{Z},+)$ será grupo abeliano. Lo veremos en el tema 4.

La noción de número natural aparece en todos los cursos de la educación secundaria y bachillerato, puesto que es un elemento principal en el conocimiento matemático. En concreto, en la LOMLOE queda recogido su estudio en el bloque de sentido numérico y de las operaciones, dado que en este bloque se trabaja el conjunto de saberes básicos relacionados con la comprensión y significado de número, su naturaleza, representación, simbolización y su uso en las relaciones, propiedades, operaciones y estrategias del cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- De Guzmán, M., Rubio, B. Análisis matemático. Ed Pirámide, Madrid 1990.
- Norman L. Biggs. Matemática discreta. Ed. Vicens Vives, Barcelona 1994.
- K.H. Rosen. Matemática discreta y sus aplicaciones. Ed. Mc Graw Hill, Madrid 2004.
- Peano G. Arithmetices principia, nova methodo exposita.
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE).
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.