Temario de oposiciones de

# MATEMÁTICAS II

Lidia Santágueda Ruiz
Alberto Bueno Guerrero

educàlia
editorial

**Primera edición, 2018**

**Autora**: Lidia Santágueda Ruiz y Alberto Bueno Guerrero

**Edita**: Educàlia Editorial

**Imprime**: Grupo Digital 82, S. L.

**ISBN**: 9788417493936

**Depósito Legal:** V-2801-2018

Printed in Spain / Impress en España.



**Educàlia Editorial**

Avda. de las Jacarandas 2 loft 327 46100 Burjassot-València

Tel. 960 624 309 - 963 768 542 - 610 900 111

Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com

www.e-ducalia.com

# TEMA 28

## ESTUDIO GLOBAL DE FUNCIONES.APLICACIONES A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA.



## 0. INTRODUCCIÓN.

La visualización en unos ejes coordenadas de una información algebraica constituye a simple vista una buena descripción del fenómeno que ésta describe. El lenguaje gráfico ayuda a comprender los aspectos más destacados, continuidad, tendencias puntos extremos, etc. de la función. El objetivo del tema es el estudio global del comportamiento de una función en su dominio, es decir el estudio en su intervalo de definición y no en un punto. Veamos la diferencia con un ejemplo.

$f(x)=\begin{cases} x+x^2 sen\dfrac{1}{x^2} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$ La función es derivable en cualquier punto de su dominio por ser suma de funciones derivables, lo es en particular en el punto $x=0$ ya que

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2 sen\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+xsen\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ y además por ser $f'(0)=1>0$ la función es creciente en $x=0$. Sin embargo no es creciente en cualquier entorno de $x=0$.El crecimiento de f en $x=0$ es un comportamiento local implica un comportamiento global similar intervalo.

Para desarrollar el tema iremos desglosando cada aspecto interesante en la representación gráfica de las funciones.

## 1. GRÁFICAS DE FUNCIONES

Dada una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ por gráfica se entiende el conjunto de puntos $G=\{(x,f(x)):x\in domf\}$

. Si la gráfica se lleva a un plano dónde está situado el sistema de referencia se obtiene una curva que llamamos representación gráfica de $f$ o simplemente gráfica de $f$.

Evidentemente obtener la gráfica de $f$ lleva consigo representar todos sus puntos y siendo el conjunto de ellos infinito en la mayoría de los casos se impone el estudio de propiedades que nos permitan de forma aproximada conocer su disposición. En general es conveniente estudiar las propiedades que vamos a enumerar, aunque no es preciso que todas estas propiedades se investiguen ni en el orden enumerado sino que deberemos armonizar su estudio tratando de complementar unas con otras.

## 2. DOMINIO

Obviamente lo primero que debemos conocer es dónde existe la función, hallar el dominio tiene por objeto en última instancia, parcelar el plano y reducir las regiones de estudio. En general lo denotaremos por $Domf$ y se trata $\{x \in \mathbb{R} : \exists\ y\ f(x) = y\}$

En general las funciones se definen para todos los reales o para un intervalo directo de definición $I$. Según la naturaleza de las funciones el estudio algebraico de su dominio se realiza de una manera diferente. Por ejemplo allí donde existan radicales de orden par deberemos obtener el conjunto donde el radicando sea mayor o igual que cero, o en los logaritmos será únicamente para aquellos valores que hacen el argumento positivo. Por otra parte si las funciones se ajustan a situaciones reales el estudio variara en función de la variable independiente. En general el estudio más detallado lo debemos hacer cuando se trata de funciones racionales, porque no sólo obtenemos el dominio, sino que a partir de los puntos frontera de esos intervalos de existencia, estudiaremos aspectos como continuidad y tendencias.

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y sean respectivamente $P(x) = (p_1(x))^{a_1}(p_2(x))^{a_2} \dots\dots\dots (p_{n-1}(x))^{a_{n-1}}(p_n(x))^{a_n}$

$$Q(x) = (q_1(x))^{a_1}(q_2(x))^{a_2} \dots\dots\dots (q_{m-1}(x))^{a_{m-1}}(p_m(x))^{a_m}$$

su descomposición en factores.

De manera práctica calcularemos las raíces del denominador y tendremos las siguientes posibilidades

Sólo es un cero del denominador y la función será discontinua. Habrá que hacer el estudio a izquierda y derecha de ese punto.

Es un cero del denominador y del numerador, entonces simplificaremos por ese factor y dependiendo de la multiplicidad de los factores estaremos o bien en el caso anterior, o existirá el límite y será continua, o discontinua evitable etc.

## 3. SIMETRÍAS

El estudio de las simetrías es muy útil para el dibujo de la gráfica, ya que si es par o impar con estudiar la función sólo para los reales positivos o los negativos por simetría obtenemos la otra parte de la gráfica. Recordamos que una función es **par** si $f(x) = f(-x)\quad \forall x \in Domf$ siendo $I$ el intervalo de definición y este hecho está relacionado con que la gráfica es simétrica respecto al eje OY. Por otra parte la función se dice que es **impar** si $f(x) = -f(-x)\quad \forall x \in I$ o equivalentemente $-f(x) = f(-x)\quad \forall x \in I$ y su gráfica resulta ser simétrica respecto al origen de coordenadas.

## 4. PERIODICIDAD

Este aspecto también es muy útil ya que bastará conocer cómo se comporta la función en un subintervalo del dominio y repetirlo. Si existe $T$ tal que $f(x+T)=f(x) \quad \forall x \in I$ la función es periódica, además si $T_0$ es el menor de ellos positivo, i.e. todos los demás son múltiplos de él, se dice que $f$ es periódica con **periodo** $T_0$ . La gráfica de una función periódica con periodo $T_0$ es la repetición de cualquier trozo de un intervalo de longitud $T_0$ .

## 5. RAMAS INFINITAS. ASINTOTAS

Este apartado nos ayuda a esbozar la gráfica de la función. Sea $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si se da una de las siguientes situación $x \to a$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ distancia al origen del punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $f$ tiene por límite $+\infty$ se dice que la función $f$ tiene una **rama infinita** cuando x tiende a a.

Si

- Dado $a \in \mathbb{R}$ algún elemento del conjunto $\left\{\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right\}$ existe y pertenece al conjunto $\{\pm\infty\}$ se dice que la **rama** infinita de $f$ es **hiperbólica**. También se dice que lo es cuando algún elemento del conjunto $\left\{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right\}$ existe y pertenece a $\mathbb{R}$
- Algún elemento del conjunto $\left\{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right\}$ existe y pertenece al conjunto $\{\pm\infty\}$ se dice que la **rama** infinita de $f$ es **parabólica**.

Consideremos la gráfica de la función $f$ y supongamos y cuando $x \to a \quad a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la función $f$ posee una rama hiperbólica.

Si $a \in \mathbb{R}$ , la distancia de un punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $f$ a la recta $x=a$ tiende a cero por alguno de los lados. La recta $x=a$ se conoce con el nombre de **asíntota vertical** de la gráfica de $f$ cuando $x \to a$ .

Si $a \in \{\pm\infty\}$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b \quad \text{o} \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=c$ con $b,c \in \mathbb{R}$ , la distancia de un punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $f$ a la recta $y=b \quad o \quad y=c$ tiende a 0 cuando $x \to -\infty \quad \text{o}\; x \to +\infty$ a las rectas $y=b \quad o \quad y=c$ se les llama **asíntotas horizontales** de la gráfica cuando $x \to a$

Si $f$ posea una rama parabólica cuando $x \to -\infty \quad \text{o}\; x \to +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}/\{0\}; \quad \lim\limits_{x\to a}(f-mx)=n \in \mathbb{R} \quad a \in \{\pm\infty\}$ la distancia de un punto $(x, f(x))$ de la rama infinita a la recta de ecuación $y=mx+n$ es $\dfrac{|f(x)-mx-n|}{\sqrt{1+m^2}}$ y puesto que $\lim\limits_{x\to a}(f-mx)=n$ se sigue que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{|f(x)-mx-n|}{\sqrt{1+m^2}}=0$ En consecuencia la distancia de un punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f a la recta $y=mx+n$ tiende a cero cuando $x \to -\infty \quad \text{o}\; x \to +\infty$ . A la recta $y=mx+n$ se le llama **asíntota oblicua** de la gráfica de $f$ cuando $x \to a$ .

## 6. CRECIMIENTO Y EXTREMOS

Una de las propiedades fundamentales a la hora de representar una función es su crecimiento ya que con su visualización se establecen rápidas conclusiones sobre la relación entre las variables.

Se dice que $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es **monótona creciente** respectivamente **decreciente** en el intervalo $[a,b]$ si $\forall\ x<y\in[a,b]$ se tiene que $f(x)<f(y)$ respectivamente que $f(x)>f(y)$.

Diremos que la función $f$ tiene un **máximo**, respectivamente **mínimo**, relativo en el punto $x=a$ si existe un entorno $U(a)$ tal que $f(x)\geq f(a)$ (respectivamente $f(x)\leq f(a)$ para cualquier $x\in U(a)$. A los máximos y mínimos relativos se les llama **extremos relativos**.

Se dice que $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ tiene un **máximo**, respectivamente **mínimo**, **absoluto** del punto $x=p$ si para cualquier $x\in[a,b]$ $f(x)\leq f(p)$ respectivamente $f(x)\geq f(p)$ . A los máximos y mínimos absolutos se les llama extremos absolutos.

Veamos qué condiciones podemos utilizar para determinar este tipo de puntos extremos y por ende el crecimiento y decrecimiento.

TEOREMA. Si $f$ es derivable en un entorno $U(a)$ y $x=a$ es un máximo (mínimo) relativo entonces $f'(a)=0$

DEMOSTRACIÓN supongamos que $x=a$ es un máximo relativo. Si $f'(a)>0$ entonces existirá $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ y aplicando las propiedades sobre límites podríamos encontrar un entorno $V(a)\subset U(a)$ tal que $\forall x\in V(a)$ se tendrá $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

Obviamente si $x>a$ necesariamente tendría que ser $f(x)>f(a)$ que contradice la hipótesis de ser $x=a$ x un máximo relativo. La demostración es análoga si la derivad es negativa por lo que $f'(a)=0$

**TEOREMA DE ROLLE**. Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ entonces existe $c\in\,]a,b[\ \mid f'(c)=0$

DEMOSTRACIÓN. Si $f$ es constante el teorema está probado. Si no lo e, de s la continuidad de $f$ en $[a,b]$ y el teorema de Weierstrass asegura La existencia $c\in\,]a,b[$ dónde $f$ posee un máximo o mínimo absoluto, que ciertamente relativo. Por lo tanto hemos encontrado $c\in\,]a,b[\ \mid f'(c)=0$.

**TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS DE LAGRANGE**. Si $f$ es continua de $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ entonces existe $c\in\,]a,b[\ \mid f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

DEMOSTRACIÓN función $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ es continúa en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ por ser diferencia de dos funciones que lo son. Como además cumplen que $F(a)=f(a)=F(b)$ la función $F(x)$f cumple las condiciones del teorema de Rolle y por lo tanto existe $c\in\,]a,b[\ \mid F'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ C

COROLARIO. Con las condiciones anteriores y además si $f'(x)=0$ la función es constante

DEMOSTRACIÓN Si $x\in[a,b]$ aplicando el teorema anterior al intervalo $[a,x]$se tiene que para algún

$$c\in]a,x[| \; f'(c)=0=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f(x)=f(a)$$

COROLARIO Si las funciones $f$ y $g$ son continuas en $[a,b]$y derivables en $]a,b[$ entonces $f-g$ es constante.

DEMOSTRACIÓN basta aplicar el corolario anterior a la función $f-g$.

TEOREMA si $f$ es derivable en derivable en $]a,b[$ y $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ $\forall x\in]a,b[$ entonces $f$ es monótona creciente (respectivamente decreciente) en $]a,b[$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $f'(x)>0$ $\forall x\in]a,b[$. Dados $x_1<x_2\in[a,b]$ puesto que la función $f$ cumple las condiciones del teorema de los incrementos finitos de Lagrange en el intervalo $[x_1,x_2]$ se cumple que

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \text{ y } c\in]x_1,x_2[$$

Entonces $f(x_2)-f(x_1)>0,\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ tanto es monótona creciente e$[a,b]$. De manera análoga se comprueba para $f'(x)<0$.

Con estos criterios podemos estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función, considerando los intervalos donde $f'(x)>0$ y $f'(x)<0$ . Asimismo el estudio de los extremos es una cuestión local, si en $x=a$ tenemos $f'(a)=0=f''(a)=............=f^{n-1}(a)$ y $f^{n}(a)\neq 0$ con n par entonces $x=a$ es un extremo relativo, máximo relativo si $f^{n}(a)<0$ y mínimos relativo si $f^{n}(a)>0$

No todos los máximos y mínimos se pueden calcular mediante la derivada porque siempre serán derivables en ese punto, en ese caso hay que utilizar otras técnicas, si no es derivable en ese punto pero lo es en un entorno reducido podremos estudiar crecimiento y decrecimiento de la función a derecha e izquierda y estudiar los casos, en otra situación habrá que buscar técnicas alternativas.

## 7. CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

El estudio de este punto es similar al anterior si la función es dos veces derivable nos allana enormemente el camino. Se dice que $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es **convexa** en $[a,b]$ si $\forall$ $x,y\in[a,b]$ se tiene que

$$f\left((1-t)x+ty\right)\leq(1-t)f(x)+f(y) \quad \forall t\in[0,1]$$ y **cóncava** si

$$f\left((1-t)x+ty\right)\geq(1-t)f(x)+f(y) \quad \forall t\in[0,1]$$

Los conceptos de convexidad y concavidad tienen una interpretación geométrica basada en la relación existente entre la gráfica de la función el intervalo de extremos $x,y$ y el segmento que conectan los puntos $\left(x,f(x)\right)$ $\left(y,f(y)\right)$ . Si $t\in]0,1[$ entonces $(1-t)x+ty$ pertenecen al intervalo de extremos $x,y$ y es fácil probar que $\left((1-t)x+ty,(1-t)f(x)+f(y)\right)$ es un punto del segmento comprendido entre

$(x,f(x))$ $(y,f(y))$ . Por lo tanto la condición de convexidad segura que el segmento que conecta $(x,f(x))$ con $(y,f(y))$ se encuentra en el conjunto $\{(x,y_1) | y_1 \geq f(x)\}$

Razonando de forma singular la condición de concavidad nos aseguraría que se conecta $(x,f(x))$ con $(y,f(y))$ se encuentra el conjunto. $\{(x,y_1) | y_1 \leq f(x)\}$

TEOREMA sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable entonces $f$ es convexa en $[a,b]$ sí y solo si $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f$ es convexa en $[a,b]$ por definición $t \in ]0,1[$ se tiene que $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + f(x_2) \quad \forall t \in [0,1]$ o equivalentemente

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$$
$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(x_1) \leq t(f(x_2) - f(x_1))$$

restando en ambos miembros $tf'(x_1)(x_2 - x_1)$ y dividiendo por $t$ se tiene que

$$\frac{f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(x_1) - tf'(x_1)(x_2 - x_1)}{t} \leq f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Y como

$$\lim_{x \to o} \frac{f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(x_1) - tf'(x_1)(x_2 - x_1)}{t} = 0 \Rightarrow$$
$$0 \leq f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow$$
$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Recíprocamente si $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ cumple que $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ dados $x, y \in [a,b]$ $y$ $t \in [0,1]$ consideramos $z = (1-t)x + ty$ puede probarse fácilmente que $y = z - \frac{1-t}{t}(x - z)$. Entonces

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z) \quad (1)$$
$$f(y) \geq f(z) + f'(z)\left(-\frac{1-t}{t}(x - z)\right) \quad (2)$$

Multiplicandolaexpresiónunopor $\frac{1-t}{t}$ ysumandocondosseobtiene $\frac{1-t}{t} f(x) + f(y) \geq \left(\frac{1-t}{t} + 1\right) f(z)$

o lo que es lo mismo $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + f(y) \quad \forall t \in [0,1]$

TEOREMA Sea $f$ dos veces derivable entonces $f$ es convexa en $[a,b]$ si solo si $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

DEMOSTRACION Si $f$ es convexa entonces dado $x < y$ se tiene

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y) \qquad f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$$

entonces

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x - y) \qquad f(y) - f(x) \geq f'(x)(x - y)$$

$f'(y)(x - y) \leq f'(x)(y - x) \Rightarrow f'(y) \geq f'(x) \Rightarrow f''(x) \geq 0$ y lo que prueba que la en $[a,b]$

Recíprocamente supongamos que es $f''(x)\geq 0$ en $[a,b]$ y sean $x,y\in[a,b]$ para los que supondremos sin pérdida de generalidad que $x<y$. El teorema de los incrementos finitos de Lagrange asegura que $f(y)-f(x)\geq f'(c)(y-x)\quad c\in]x,y[$ con y puesto que $f''(x)\geq 0$ en la entonces $f(y)-f(x)\geq f'(x)(y-x)\quad c\in]x,y[$ y el teorema previo nos asegura que ver $f$ es convexa en $[a,b]$.

De la misma manera lo tendríamos en el caso de que $f$ fuera cóncava simplemente cambiando el sentido de las desigualdades.

Para el estudio de la convexidad y los puntos de inflexión procederemos de manera similar al apartado anterior, i.e. estudiaremos los intervalos donde procederemos a estudiar $f''(x)\geq 0$ para los intervalos de convexidad y $f''(x)\leq 0$ para la concavidad.

Asimismo el estudio de los puntos de inflexión también es una cuestión local, si en $x=a$ tenemos $f''(a)=0=...........=f^{n-1}(a)$ y $f^{n}(a)\neq 0$ con n impar entonces $x=a$ es un punto de inflexión.

## 8. CONCLUSIÓN

En este tema hemos revisado cómo construir la curva que representa gráficamente la función $f(x)$, determinando las propiedades características de la misma y sus elementos notables de manera que aun no conociendo el valor de la función en todos los puntos de la curva, se pueda deducir del examen de la gráfica las propiedades de la función. Conocer la familia de las funciones a la que estamos estudiando ayuda a concretar y simplificar las propiedades estudiadas en el tema.

## 9. LEGISLACIÓN

**Real Decreto 1105 / 2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato** (ANEXO I: materias del bloque de asignaturas troncales. 24 – Lengua castellana y Literatura). Se desarrollan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables en los diferentes cursos de los bloques: 1- Comunicación oral: escuchar y hablar; 2- Comunicación escrita: leer y escribir; 3- Conocimiento de la lengua; 4- Educación literaria

El **artículo 2.4 del Real Decreto 310 / 2016, de 29 de julio**, por el que se regulan las evaluaciones finales de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato, especifica que los estándares de aprendizaje evaluables que constituirán el objeto de evaluación procederán de la concreción de los recogidos en el **Real Decreto 1105 / 2014, de 26 de diciembre,** por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

**La Ley Orgánica 8 / 2013, de 9 de diciembre**, para la Mejora de la Calidad Educativa, modificó el artículo 6 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, para definir el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. El currículo estará integrado por los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa; las competencias, o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, para lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos; los contenidos, o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias; la metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes; los estándares y resultados de aprendizaje evaluables; y los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado.

## 10. BIBLIOGRAFÍA

Ortega J. M. Introducción al Análisis Matemático. Ed Labor Barcelona 1993

Burgos J de. Cálculo Infinitesimal de una variable. Ed MacGraw-Hill. Madrid 1994

Stewart. J. Cálculo Multivariable Ed. Thomson Editores México 1999

Santagueda Lidia. "Temario de oposicones de Matemáticas Secundaria". Educàlia Editorial, Valencia 2018

# TEMA 31

## INTEGRACIÓN NUMÉRICA. MÉTODOS Y APLICACIONES



## 0. INTRODUCCIÓN

La historia de la integración numérica se remonta a Arquímedes, quién usó el llamado método exhaustivo para calcular el área bajo una parábola o para calcular de forma aproximada el número . Sus ideas fueron aprovechadas más tarde por Newton y Leibniz para dar lugar al cálculo infinitesimal. Este permitió, mediante la Regla de Barrow, obtener integrales definidas a través de la evaluación de una primitiva de la función a integrar en los extremos del integrando. Sin embargo, la regla de Barrow no es aplicable a todas las funciones integrables. Por ejemplo, el cálculo de probabilidades con la distribución normal requiere la integración de la función de densidad gaussiana, cuya primitiva no es expresable en términos de funciones elementales. Haciendo uso de técnicas de integración numérica, es posible obtener probabilidades relacionadas con dicha distribución.

Debido a lo anteriormente expuesto y a otras razones que veremos a lo largo del desarrollo del tema, la integración numérica se ha convertido en una rama de las matemáticas imprescindible en cualquier aplicación del cálculo infinitesimal tanto al ámbito científico como al de la ingeniería.

El desarrollo del tema es como sigue. El apartado 1 se dedica a la exposición de los métodos más usados en integración numérica, conocidos como métodos de Newton-Cotes, obteniendo las fórmulas del Trapecio y de Simpson, tanto en el caso simple como en el compuesto. Asimismo se expone brevemente un método que permite acelerar la convergencia de los anteriores, conocido como método de Romberg. El apartado 2 es una aplicación de los métodos anteriores al cálculo de una integral conocida, para ejemplificar su funcionamiento y determinar la bondad de cada uno de ellos. El apartado 3 con la conclusión y el 4 con la bibliografía concluyen el tema.

## 1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Consideremos el problema de obtener el valor de

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) p_{n,i}(x)$$

con  una función integrable en [a, b]. Si $f$ es continua, la Regla de Barrow nos da

$$p_{n,i}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

donde F es una primitiva de $f$, pero hay casos en los que esta regla no es aplicable. Por ejemplo, si la función $f$ no es continua, o si no es posible expresar en términos de funciones elementales la primitiva F. En otras ocasiones, de la función sólo conocemos su valor en un conjunto de puntos aislados.

El objetivo de la integración numérica consiste en desarrollar diferentes métodos para el cálculo aproximado de integrales definidas que puedan ser usados en los casos expuestos anteriormente.

Los métodos más habituales de integración numérica parten de considerar interpolaciones polinómicas de la función a integrar y así aproximar el valor de la integral de dicha función por el de la integral del polinomio interpolador.

Antes de comenzar con la exposición de dichos métodos, necesitamos recordar algunos resultados acerca de interpolación polinómica de funciones.

**Teorema 1:** Sea $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ y consideremos $\{x_i\}_{i=0}^{n}\subset[a,b]$. Entonces, si $x_i\neq x_j$ para $i\neq j$, existe un único polinomio interpolador de grado menor o igual que n, $P_n\in\mathcal{P}_n$, tal que $P_n(x_i) = f(x_i)\ \forall i\in\{0,1,\dots,n\}$. Dicho polinomio viene dado por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)p_{n,i}(x)$$

con

$$p_{n,i}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ i\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

y se conoce como el **polinomio de Lagrange** para la función asociado al conjunto de puntos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ .

**Demostración:** Los polinomios $\mathcal{P}_{n,i}(x)$ están bien definidos para , por ser para i = 0, 1,..., n, por ser $x_i\neq x_j$ para $i\neq j$. Además, es inmediato comprobar que $p_{n,i}\in\mathcal{P}_n$ y que $p_{n,i}(x_k) = \delta_{ik}\begin{cases}1 \text{ si } i=k\\ 0 \text{ si } i\neq k\end{cases}$ . Si ahora consideramos el polinomio , tenemos que $P_n\in\mathcal{P}_n$ y que $P_n(X_i) = f(x_i)\forall i\in\{0, 1,\dots,n\}$. Para demostrar la unicidad, supongamos que existen $P_n$, $Q_n\in\mathcal{P}_n$ tales que $P_n(x_i) = Q_n(x_i) = f(x_i)\forall i\{0,1,\dots,n\}$. Si ahora definimos el polinomio $H_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$ tendremos que $H_n\in\mathcal{P}_n$ con $H_n(x_i) = 0\ \forall i\in\{0, 1,\dots, n\}$, luego $H_n$ es un polinomio de grado menor o igual que n con n+1 raíces distintas. Esto sólo es posible si $P_n=Q_n$.

El error de la aproximación de una función por su polinomio de Lagrange puede hallarse bajo ciertas condiciones sobre la función $f$, como establece el siguiente resultado que ofrecemos sin demostración.

**Teorema 2:** Si $f\in C^{n+1}([a,b])$ se tiene que $\forall x\in[a,b]\ \exists\zeta\in(a,b)$ tal que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

El cálculo aproximado de la integral considerando un polinomio de Lagrange de grado menor o igual que n consistirá en hacer

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_n(x)dx.$$

En el caso en el que el Teorema 2 sea aplicable, el error se obtendrá integrando la expresión en dicho teorema y vendrá dado por

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx\right| = \frac{\left|f^{n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|\int_a^b \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\,dx\right|, \qquad \xi \in (a,b)$$

### 1.1 MÉTODO DE NEWTON‐COTES

Este método consiste en considerar que los puntos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ en los que conocemos el valor de la función constituyen una partición equiespaciada del intervalo , es decir, $x_i = a + ih$, i = 0, 1,...,n y $h=\frac{b-a}{n}$ y , donde h es la distancia entre los puntos de la partición.

- Fórmula de Newton-Cotes para 2 puntos (Fórmula del Trapecio)

Tomamos n=1, con lo cual $x_0$=a, $x_1$ = b, h=b - a. El polinomio de Lagrange será

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(a)p_{1,0}(x) + f(b)p_{1,1}(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

y la aproximación para la integral vendrá dada por

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\cong \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \end{aligned}$$

Se la conoce como **Fórmula del Trapecio** ya que se aproxima $\int_a^b f(x)dx$ por el área del trapecio de bases paralelas $f$(a) y $f$(b) y altura b-a.

Para el error tenemos

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_1(x)dx = \\ &\quad = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right]_a^b \\ &\quad = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{b^3}{3} - (a+b)\frac{b^2}{2} + ab^2 - \frac{a^3}{3} + (a+b)\frac{a^2}{2} - a^2b\right] \\ &\quad = \frac{f''(\xi)}{2}\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{6} = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) \end{aligned}$$

Así, existirán $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}), \qquad i = 0, \ldots, n-1$ tales que

$$I - \tilde{I} = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{nh^3}{12}f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$$

con $\xi \in (a,b)$ , de donde

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_1(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{\xi \in (a,b)} |f''(\xi)|$$

- Fórmula de Newton-Cotes para 3 puntos (Fórmula de Simpson)

Ahora tendremos que n=2, con lo cual $x_0$ = a, $x_1$ = $\frac{b+a}{2}$, $x_2$=b, h= $\frac{b-a}{2}$ y el polinomio de Lagrange vendrá dado por

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)p_{2,0}(x) + f(x_1)p_{2,1}(x) + f(x_2)p_{2,2}(x) \\ &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{aligned}$$

Integrando, simplificando y sustituyendo $x_0$, $x_1$ y $x_2$ por sus valores, se obtiene la **F**órmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Se puede demostrar que el error asociado viene dado por

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_2(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{\xi \in (a,b)} \left|f^{IV)}(\xi)\right|$$

- Fórmulas compuestas

Cuando se tiene un valor de n>2, en lugar de aplicar la fórmula de Newton-Cotes correspondiente al número de puntos, se suelen aplicar las fórmulas anteriores del Trapecio o de Simpson a cada 2 ó 3 puntos consecutivos para dar lugar a las fórmulas compuestas.

Así, por ejemplo, si para n>2 aplicamos la Fórmula del Trapecio a cada intervalo del tipo [$x_i$, $x_{i+1}$] i=0,...,n-1 y sumamos todos los resultados, obtenemos la **Fórmula del Trapecio Compuesta**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\cong h\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right] \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

con $x_i$ = a + ih, h = $\frac{b-a}{n}$.

Si denotamos por I a la integral exacta y por $\tilde{I}$ a su valor aproximado por la Fórmula del Trapecio Compuesta, tendremos que su diferencia, I - $\tilde{I}$ se obtendrá aplicando la expresión para dicha diferencia del caso de la Fórmula del Trapecio simple a cada uno de los intervalos y a continuación sumando los resultados obtenidos.

donde hemos aplicado que por ser $f''$ continua en [a,b], existe un $\xi \in (a,b)$ tal que $f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$ . Llegamos así a que

$$|I - \tilde{I}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{\xi\in(a,b)} |f''(\xi)|.$$

La **Fórmula de Simpson Compuesta** se obtiene aplicando la Fórmula de Simpson simple a cada 3 puntos consecutivos. Para ello se necesita que n sea par, es decir, un número impar de puntos de interpolación. Viene dada por

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

con $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$ y su error asociado es

$$|I - \tilde{I}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{\xi\in(a,b)} |f^{IV)}(\xi)|.$$

### 1.2 MÉTODO DE ROMBERG

Este método permite disminuir la cota de error combinando aproximaciones obtenidas con un mismo método numérico pero con particiones refinadas a la mitad en cada paso.

Sea $I_j^0$ el valor de la Fórmula del Trapecio que aproxima $\int_a^b f(x)dx$ con paso $h = \frac{b-a}{2^j}$ y $(2^j + 1)$ puntos equiespaciados $x_i = a + ih$, i= 1, 2,...,$2^j$. Consideremos una lista de estos valores para j = 0, 1,...,k: $I_0^0, I_1^0, \ldots, I_K^0$ . A partir de ella se obtienen, para cada k∈{1,...,K} sucesivas listas de números dadas por

$$I_j^k = \frac{4^k I_{j+1}^{k-1} - I_j^{k-1}}{4^k - 1}, \quad j = 0,1,\ldots,K-k.$$

La aproximación de Romberg a la integral viene dada por $I_0^K$ . Si $f \in C^{2K+2}([a,b])$ , el error es proporcional a $h^{2K+2}$ con $h = \frac{b-a}{2^K}$, de forma que aumentando los valores de K conseguimos mejorar la precisión de la aproximación.

## 2. APLICACIÓN

Como ejemplo ilustrativo de los métodos de integración expuestos anteriormente, vamos a utilizarlos para obtener una integral simple que nos permita comparar la bondad de las aproximaciones con los distintos métodos.

Vamos a considerar la integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = 0'\hat{3}$$

- Fórmula del Trapecio con 2 puntos

$$x_0 = a = 0, x_1 = b = 1; \quad f(0) = 0, f(1) = 1; \quad f''(x) = 2$$

$$\int_0^1 x^2 dx \cong \frac{0+1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0'5$$

$$Error \leq \frac{1^3}{12} \cdot 2 = \frac{1}{6} = 0'1\hat{6}$$

Vemos como la Fórmula del Trapecio no da el valor exacto de la integral y la cota de error coincide exactamente con el error de aproximación.

- Fórmula de Simpson con 3 puntos

$$x_0 = a = 0, x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}, x_2 = b = 1$$

$$f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, f(1) = 1; \quad f''(x) = 2$$

$$\int_a^b x^2 dx \cong \frac{1}{6}\left[0 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right] = \frac{1}{3}$$

$$Error \leq 0$$

La Fórmula de Simpson ya da el valor exacto para la integral.

- Método de Romberg

Tomemos K = 2. Tenemos que obtener en primer lugar $I_0^0, I_1^0, I_2^0$ y lo hacemos mediante la Fórmula del Trapecio.

$$\boldsymbol{I_0^0}: h = \tfrac{1}{2^0} = 1; \quad x_0 = a = 0, x_1 = b = 1$$

$$\Rightarrow \quad I_0^0 = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{I_1^0}: h = \tfrac{1}{2^1} = \tfrac{1}{2}; \quad x_0 = 0, x_1 = \tfrac{1}{2}, x_2 = 1$$

$$f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, f(1) = 1$$

$$\Rightarrow I_1^0 = \frac{1/2}{2} \cdot \left[0 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right] = \frac{3}{8}$$

$$\boldsymbol{I_2^0}: h = \tfrac{1}{2^2} = \tfrac{1}{4}; \quad x_0 = 0, x_1 = \tfrac{1}{4}, x_2 = \tfrac{1}{2}, x_3 = \tfrac{3}{4}, x_4 = 1$$

$$f(0) = 0, f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}, f(1) = 1$$

$$\Rightarrow I_2^0 = \frac{1/4}{2} \cdot \left[0 + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{9}{16} + 1\right] = \frac{11}{32}$$

Una vez obtenidos $I_0^0, I_1^0, I_2^0$ obtenemos el resto de los $I_j^k$ por recurrencia.

$$I_0^1 = \frac{4^1 I_1^0 - I_0^0}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{2}}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$I_1^1 = \frac{4^1 I_2^0 - I_1^0}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot \frac{11}{32} - \frac{3}{8}}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

Finalmente

$$I_0^2 = \frac{4^2 I_1^1 - I_0^1}{4^2 - 1} = \frac{16 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{16 - 1} = \frac{1}{3}$$

y el método de Romberg da como resultado $I_0^2 = \dfrac{1}{3} = 0'\hat{3}$ que es el valor exacto y que ya se obtenía con la segunda etapa del método.

## 3. CONCLUSIONES

En la mayoría de las aplicaciones del cálculo integral a problemas relacionados con la ciencia o la tecnología no se suele disponer de fórmulas cerradas para las funciones a integrar sino que más bien se tiene una serie de valores de la función en determinados puntos obtenidos experimentalmente. Piénsese por ejemplo en el cálculo del volumen de agua que puede contener un pantano a partir de datos topográficos o en cualquiera de las múltiples aplicaciones de la transformada de Fourier. De hecho, gran parte del software utilizado en diversas aplicaciones tecnológicas lleva incorporado algoritmos para la obtención numérica de integrales.

Así pues, podemos afirmar que la importancia relativa de los métodos “de libro de texto” de resolución de integrales mediante la Regla de Barrow en las aplicaciones reales  es pequeña en comparación con la inmensa cantidad de situaciones en las que problemas relacionados con el cálculo integral tienen que ser resueltos mediante la aplicación de técnicas numéricas como las que hemos desarrollado en el presente tema.

## 4. LEGISLACIÓN

**Real Decreto 1105 / 2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato** (ANEXO I: materias del bloque de asignaturas troncales. 24 – Lengua castellana y Literatura). Se desarrollan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables en los diferentes cursos de los bloques: 1- Comunicación oral: escuchar y hablar; 2- Comunicación escrita: leer y escribir; 3- Conocimiento de la lengua; 4- Educación literaria

El **artículo 2.4 del Real Decreto 310 / 2016, de 29 de julio**, por el que se regulan las evaluaciones finales de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato, especifica que los estándares de aprendizaje evaluables que constituirán el objeto de evaluación procederán de la concreción de los recogidos en el **Real Decreto 1105 / 2014, de 26 de diciembre,** por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

**La Ley Orgánica 8 / 2013, de 9 de diciembre**, para la **Mejora de la Calidad Educativa**, modificó el artículo 6 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, para definir el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. El currículo estará integrado por los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa; las competencias, o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, para lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos; los contenidos, o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias; la metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes; los estándares y resultados de aprendizaje evaluables; y los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado.

## 5. BIBLIOGRAFÍA


Doubova  y Guillén: Un Curso de Cálculo Numérico. Universidad de Sevilla, 2007.

Grau y Noguera: Cálculo Numérico, Universidad Politécnica de Cataluña, 2001.

Burden y Faires: Análisis Numérico, International Thomson Editores, 2002.

Santagueda Lidia. “Temario de oposicones de Matemáticas Secundaria”. Educàlia Editorial, Valencia 2018