FÍSICA Y QUÍMICA

José Antonio Montiel Tosso

Supuestos prácticos

educàlia editorial

Supuestos prácticos de

FÍSICA Y QUÍMICA

Jose Antonio Montiel Tosso

educàlia editorial

Primera edición, 2019
Autor: Jose Antonio Montiel Tosso
Edita: Educàlia Editorial
Imprime: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-16663-21-7
Depósito legal: V-938-2019
Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial
Avda. de las Jacarandas 2 loft 327 - 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 768 542 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com

www.e-ducalia.com

FÍSICA

PROBLEMAS AVANZADOS
MECÁNICA

BLOQUE AVANZADO I
MECÁNICA

1) Un punto material de masa $m_1 = 0{,}1$ kg se mueve en un plano horizontal liso con velocidad constante $v_1 = 10$ m/s, en dirección perpendicular a una varilla homogénea de masa $m_2 = 1$ kg y longitud $l = 1$ m, situada en el mismo plano horizontal, con la que choca a una distancia $x = 0{,}2$ m de su punto medio. Sabiendo que el momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular en su punto medio es $1/12\ m\ l^2$, calcular las velocidades del punto material y del centro de masas de la varilla después del choque en los casos siguientes:

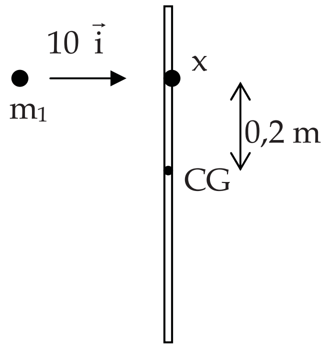
a) Choque inelástico.

b) Choque perfectamente elástico.

c) ¿Qué condición general tiene que cumplir un sólido rígido para que su momento angular L_0 y su velocidad angular ω tengan la misma dirección?

SOLUCIÓN:

a) Sea v' la velocidad de m_1 tras el choque y v_G la velocidad del centro de gravedad de la varilla. Además, ω es la velocidad de rotación de la varilla sobre su propio centro de gravedad.



Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento:

$0{,}1 \cdot 10 = 0{,}1 \cdot v' + 1 \cdot v_G$, es decir:

$$0{,}1 \cdot v' + v_G = 1 \quad (1)$$

Aplicando la conservación del momento angular:

$0{,}1 \cdot 10 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 \cdot v' \cdot 0{,}2 + I\ \omega$, donde el primer miembro representa el momento angular de la masa antes del choque y el segundo corresponde al sistema después del choque, siendo el primer sumando el que corresponde a la masa y el segundo a la varilla.

Pero el momento de inercia I de la varilla es:

$I = \dfrac{1}{12} m \cdot l^2 = \dfrac{1}{12}$ kg m², el cual podemos sustituir en la conservación del momento angular para obtener una segunda ecuación: $0{,}2 = 0{,}02 \cdot v' + \dfrac{\omega}{12}$ (2)

Por tratarse de un choque inelástico la velocidad de m_1 después del choque y la velocidad del punto x de la varilla son iguales, y podremos decir que:

$$v' = v_G + 0{,}2\ \omega \quad (3)$$

(ya que la velocidad de x tiene dos términos, la velocidad del centro de gravedad de la varilla y la velocidad debida al movimiento de rotación, $v' = v_G\ \omega \cdot R$, siendo $R = 0{,}2$ m).

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3), llegamos a:

$$v' = 1{,}3 \text{ m/s} \qquad v_G = 0{,}87 \text{ m/s} \qquad \omega = 2{,}1 \text{ rad/s}$$

b) Si el choque es elástico, se siguen verificando las ecuaciones (1) y (2). Ahora la tercera ecuación se obtiene al aplicar el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^{\,2} = \frac{1}{2}m_1 \cdot v'^2 + \frac{1}{2}M \cdot v_G^{\,2} + \frac{1}{2}I \cdot \omega^2$$

Es decir: $$0{,}1 \cdot 10^2 = 0{,}1 \cdot v'^2 + v_G^{\,2} + \frac{1}{12}\omega^2 \qquad (3')$$

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3'):

$$v' = -7{,}4 \text{ m/s} \qquad v_G = 1{,}74 \text{ m/s} \qquad \omega = -4{,}2 \text{ rad/s}$$

c) Cuando un sólido rígido gira alrededor de un eje, su momento angular $\vec{L}$ es un vector dirigido según dicho eje de rotación, cuyo sentido viene dado por la regla de Maxwell (avance del sacacorchos) y cuyo módulo es I ω: $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ ($\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ tienen la misma dirección).

2) Una esfera maciza y homogénea y un cilindro también macizo y homogéneo ruedan, sin deslizar, por un plano inclinado de 10 m de longitud. Supuesto que ambos objetos hayan iniciado simultáneamente su movimiento desde el punto más elevado del plano:

a) ¿Cuál llegará antes?

b) Calcúlese qué distancia habrá recorrido uno de ellos cuando el otro llegue al final del mismo. Despréciese el rozamiento de rodadura.

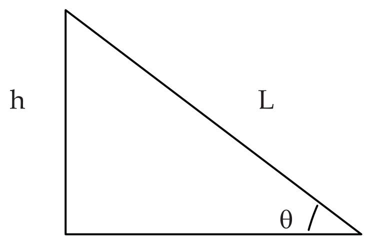
SOLUCIÓN:

a) Como ruedan sin deslizar, $v = \omega R$

Al no deslizar no hay rozamiento, luego la energía se conserva:

$$\Delta E = 0; \; E_1 = E_2$$

$$E_{p1} = E_{c2} + E_{cr2}$$



La energía potencial arriba del plano se transforma en energía cinética, tanto de traslación como de rotación:

$$mgh = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

$$v = \omega R$$

Esfera: $I = \frac{2}{5}mR^2$

$$mgh = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \frac{2}{10}mR^2\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \frac{2}{10}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

de donde obtenemos la velocidad final de la esfera: $v_e = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 1{,}2\sqrt{gh}$

Cilindro: $I = \tfrac{1}{2}\,MR^2$ $\qquad v_{fc} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 1{,}15\sqrt{gh}$

$$mgh = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{4}mR^2\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

De donde obtenemos la velocidad final del cilindro: $v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 1{,}15\sqrt{gh}$

Luego la esfera llega primero, pues desciende a mayor velocidad.

b) Ambos cuerpos se mueven con un MRUA, con aceleraciones de diferente valor. Así pues, para ellos:

$v = a\,t$

$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$

pues no tienen velocidad inicial.

Relacionando ambas ecuaciones, obtenemos la siguiente expresión: $s = \frac{1}{2}\,v\,t$

En el instante en que la esfera llega al pie del plano inclinado (s = L) el cilindro habrá recorrido un espacio s:

Cilindro: $s = \frac{1}{2} v_c t$

Esfera: $L = \frac{1}{2} v_e t$

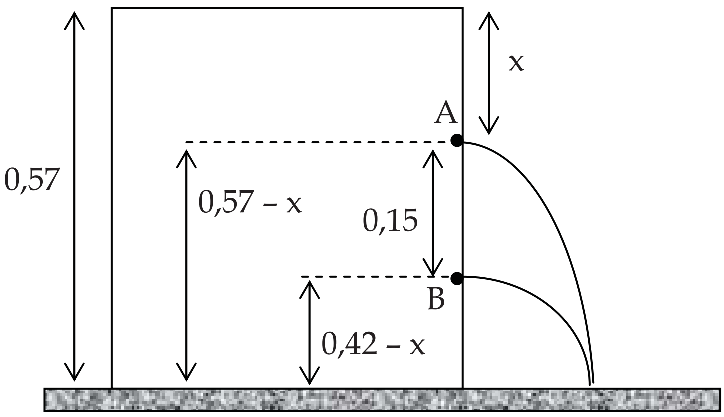
Dividiendo ambas ecuaciones, obtenemos el espacio recorrido por el cilindro:

$$\frac{s}{L} = \frac{v_c}{v_e} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1{,}15}{1{,}2} 10 = 9{,}58 \text{ m}$$

3) En un recipiente lleno de agua hasta una altura constante de 57 cm practicamos dos orificios, A y B, sobre una misma línea vertical en la pared. Si la distancia AB son 15 cm, ¿a qué distancia de la superficie del líquido está la abertura superior si ambos chorros de agua se cortan en el mismo punto del suelo?

SOLUCIÓN:

Sean A y B los orificios y v_A y v_B las velocidades de salida dadas por el teorema de Torricelli: $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, donde h es la distancia del orificio a la superficie libre del líquido.



$$v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot (x + 0{,}15)}$$

Puesto que la velocidad de salida tiene dirección horizontal, podemos expresar el alcance como $x_{max} = v_o\, t$, que ha de ser el mismo para ambos orificios. Por ello, se cumplirá:

$$x_{max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot x} \cdot t_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot (x + 0{,}15)} \cdot t_B$$

Elevando al cuadrado y simplificando obtenemos: $x \cdot t_A{}^2 = (x + 0{,}15) \cdot t_B{}^2$ (1)

Por otro lado, recurriendo a las ecuaciones de la caída libre desde la altura del orificio, tomando como referencia el suelo y recordando que la velocidad inicial (de salida) carece de componente vertical:

$0{,}57 - x = \frac{1}{2} g\, t_A^2 \quad \Rightarrow \quad t_A^2 = \frac{2\cdot(0{,}57-x)}{g}$

$0{,}42 - x = \frac{1}{2} g\, t_B^2 \quad \Rightarrow \quad t_B^2 = \frac{2\cdot(0{,}42-x)}{g}$

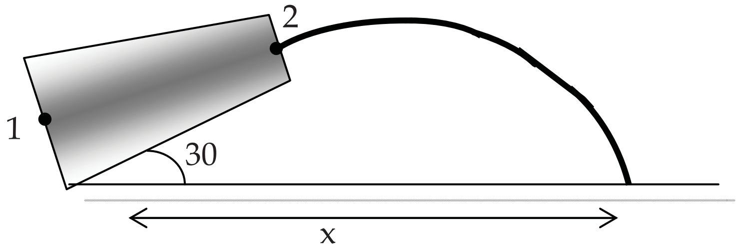
Sustituyendo t_A^2 y t_B^2 en la ecuación (1) tenemos:

$$x\cdot\frac{2\cdot(0{,}57-x)}{g} = (x+0{,}15)\cdot\frac{2\cdot(0{,}42-x)}{g} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}21 \text{ m}$$

4) Un jardinero emplea para el riego una manga cuya embocadura tiene forma de tronco de cono. Las secciones de sus bases son: 5 cm² y 1 cm²; el agua se inyecta a 1 atm, estando dicha embocadura inclinada 30°. Si se desprecia la diferencia de presión debida a la altura, ¿hasta dónde alcanzará el agua?

SOLUCIÓN:

Tomamos como puntos 1 y 2 de la corriente de agua los de ambas bases de la embocadura, y aplicando el teorema de Bernouilli:



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

Además, por el teorema de continuidad, sabemos que se cumple: $S_1\, v_1 = S_2\, v_2$.

Así que, sustituyendo los datos de las secciones de las bases, obtenemos la relación entre las velocidades agua en ambos puntos: $v_1 = \frac{v_2}{5}$.

Como $p_1 - p_2 = 1$ atm = 101300 Pa, tendremos en la ecuación de Bernouilli:

$$101300 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{v_2}{5}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

Y teniendo en cuenta que la densidad del agua es 1000 kg/m³, obtenemos que v_2 = 14,55 m/s, que será la velocidad de salida del chorro de agua, formando un ángulo de 30° con la horizontal.

Aplicando las ecuaciones del tiro parabólico al chorro de agua:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{ox}\, t = v_o \cos\alpha\, t \\ y &= v_{oy}\, t - \tfrac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_{max} &= v_o \cos\alpha\, t_{max} \\ v_y &= v_{oy} - g\, t \end{aligned}$$

Para hallar t_{max} recordaremos que es el doble del tiempo que tarda en alcanzarse la altura máxima, cuando $v_y = 0$, es decir:

Si $v_{oy} - g\,t = 0,\ t = \frac{v_{oy}}{g} \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{2 \cdot v_{oy}}{g} = \frac{2 \cdot v_o \cdot sen\alpha}{g}$

Llevando este tiempo a la expresión de x_{max}, queda:

$$x_{max} = v_o \cos\alpha \cdot \frac{2 \cdot v_o \cdot sen\alpha}{g}$$

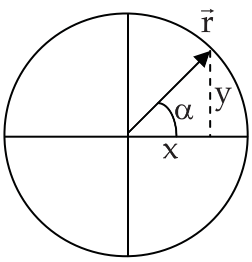
Y sustituyendo $\alpha = 30^o$ y $v_o = 14{,}55$ m/s, obtenemos $x_{max} = 18{,}7$ m.

5) Un móvil describe la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$ (SI). Cuando su vector de posición es $\vec{r} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$, su velocidad es $\vec{v} = 40\vec{i} + v_y\vec{j}$ y su aceleración es $\vec{a} = -150\vec{i} + a_y\vec{j}$, con todas las unidades en el SI. Hallar:

a) La componente v_y y el módulo de la velocidad.

b) La componente a_y, la aceleración tangencial y la aceleración normal.

SOLUCIÓN:



a) La trayectoria es una circunferencia de radio 10, de manera que el vector de posición puede expresarse como: $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = r\cos\alpha\,\vec{i} + r\,sen\alpha\,\vec{j}$

Identificando términos, tendremos:

$10 \cos \alpha = 6$ y $10\, sen\alpha = 8$

Por lo tanto, $\cos \alpha = 0{,}6$ y $sen\alpha = 0{,}8$.

El vector velocidad se obtiene: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\cos\alpha\,\vec{i} + r\,sen\alpha\,\vec{j})}{dt}$

Es decir: $\vec{v} = -r\,\alpha\,sen\alpha\,\vec{i} + r\,\alpha\cos\alpha\,\vec{j}$, y sabiendo que en el punto dado la velocidad es $\vec{v} = 40\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$, podemos identificar:

$-\,r\,\alpha\,sen\,\alpha = 40$, o sea, $-\,10 \cdot \alpha \cdot 0{,}8 = 40$, de donde $\alpha = -\,5$

Y también: $v_y = r\,\alpha\cos\alpha$, es decir: $v_y = 10 \cdot (-5) \cdot 0{,}6 = -\,30$ m/s

El módulo de la velocidad es $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{40^2 + (-30)^2} = 50$ m/s.

b) La aceleración: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\,\alpha^2\cos\alpha\,\vec{i} - r\,\alpha^2\,sen\,\alpha\,\vec{j}$

Y como $\vec{a} = -150\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$, identificamos:

$-\,r\,\alpha^2 \cos\alpha = -150$,

$-\,r\,\alpha^2\,sen\,\alpha = a_y$, de donde $a_y = -10 \cdot 25 \cdot 0{,}8 = -\,200$ m/s²

Por tanto, el módulo de la acelración es a = $= \sqrt{150^2 + 200^2} = 250$ m/s²

La aceleración normal: $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{50^3}{10} = 250$ m/s²

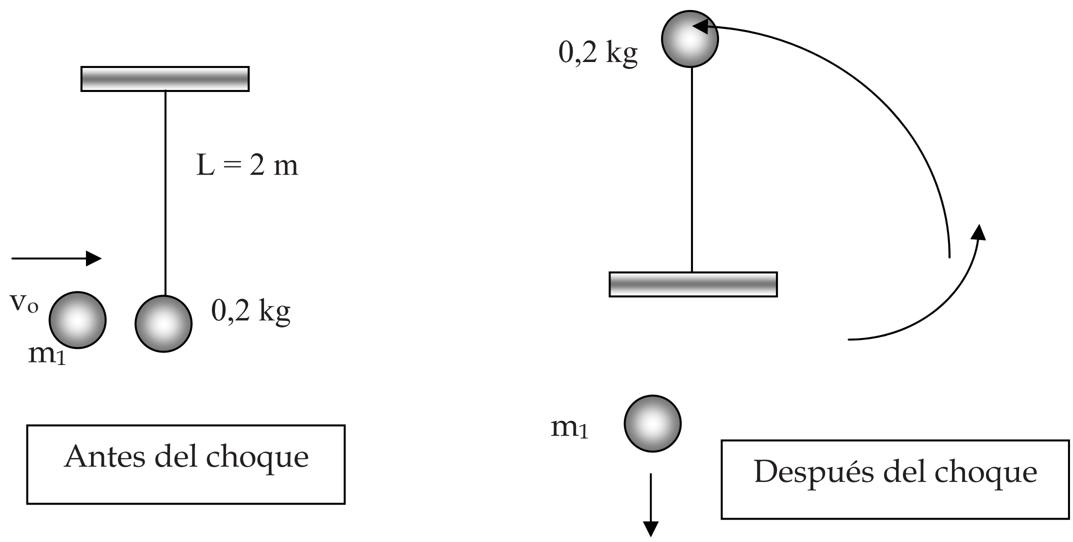
Y la aceleración tangencial: $a_t = \sqrt{a^2 - a_n^{\,2}} = 0$

6) Una pequeña esfera, de 100 g de masa, cuelga de un hilo inextensible y de masa despreciable, de 2 m de longitud, que está sujeto por el otro extremo. Se lanza horizontalmente otra pequeña esfera, de modo que realiza un choque frontal con la primera. Calcular la masa y la velocidad mínima de la segunda esfera para que, después del choque, la esfera que cuelga del hilo describa una circunferencia completa en el plano vertical y la esfera que fue lanzada horizontalmente, caiga verticalmente.

Coeficiente de restitución = ¼.

Considerar las esferas como masas puntuales.

SOLUCIÓN:



La esfera de 0,2 kg tendrá una velocidad mínima arriba, cuando la tensión sea nula, al cumplirse: $F_c = P$, es decir:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{R \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8} = 4{,}43 \text{ m/s}$$

Sabemos que el coeficiente de restitución de un choque parcialmente elástico entre dos esferas tiene la expresión:

$$K = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

En nuestro caso $v_1 = v_o$, $v_2 = 0$ y $v'_1=0$, ya que cae verticalmente y la velocidad final no tiene componente horizontal (en la dirección del choque). Aún nos falta v'_2, y para obtenerla sabemos que m_2 debe llegar al punto más alto de la circunferencia. Aplicaremos el principio de conservación de la energía (tras el choque) igualando la energía cinética de la esfera 2 después del choque con la energía final arriba (suma de cinética y potencial en el punto más alto):

$$\frac{0{,}1 \cdot {v'_2}^2}{2} = \frac{0{,}1 \cdot 4{,}43^2}{2} + 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad v'_2 = 9{,}9 \text{ m/s}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1), obtenemos: v_o = 39,6 m/s.

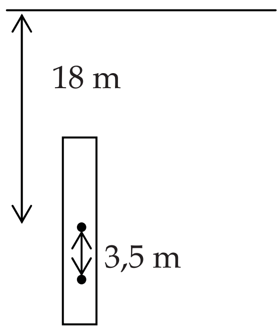
Para hallar m aplicaremos la conservación de la cantidad de movimiento en el eje x (la dirección del choque):

$$39,6 \cdot m + 0 = 0 \cdot m + 0,1 \cdot 9,9 \quad \Rightarrow \quad m = 0,025 \text{ kg} = 25 \text{ g}$$

7) Un hombre de 70 kg está sobre un tronco que se halla en reposo. El tronco, de 210 kg de masa, flota sobre un estanque en calma en posición perpendicular a la orilla del estanque. Inicialmente el hombre se encuentra a 18 m de la orilla y después se desplaza 3,5 m sobre el tronco. Determinar la distancia del hombre a la orilla en función del sentido del movimiento indicado. No se tienen en cuenta las fuerzas de rozamiento entre el tronco y el agua.

SOLUCIÓN:

El hombre se desplaza 3,5 m y puede hacerlo alejándose o acercándose a la orilla.



Suponemos primero que se aleja. Como el conjunto hombre–tronco es un sistema aislado, se conserva la cantidad de movimiento total, luego el tronco se desplazará hacia la orilla (en sentido contrario al hombre) con una velocidad v_t, de modo que diremos:

$$m_h v_h = (m_h + m_t) v_t \quad \Rightarrow \quad 70 v_h = 280 v_t \quad \Rightarrow \quad v_t = \frac{1}{4} v_h$$

Y la relación entre los espacios recorridos:

$$\frac{s_t}{s_h} = \frac{v_t \cdot t}{v_h \cdot t} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad s_t = \frac{1}{4} s_h = \frac{1}{4} 3,5 = 0,875 \text{ m}$$

Como el tronco se acerca, la distancia final del hombre, respecto a la orilla, será: $s = 18 + 3,5 - 0,875 = 20,625$ m.

En el caso de que el hombre se acerque a la orilla, el tronco se alejará, y la distancia será: $s = 18 - 3,5 + 0,875 = 15,375$ m.

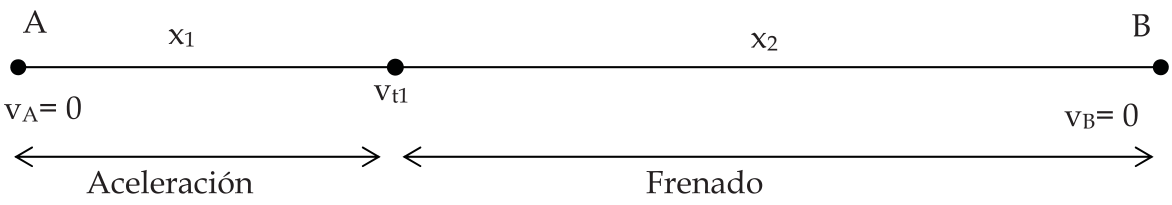
8) Una motocicleta parte del reposo desde un punto A y se desplaza 300 m a lo largo de una trayectoria recta y horizontal hasta otro punto B donde se para. Si la aceleración del vehículo está limitada a 0,7 g y la deceleración a 0,6 g (siendo g = 9,8 m/s²), calcular:

a) El tiempo mínimo necesario para cubrir dicha distancia.

b) La velocidad máxima adquirida.

SOLUCIÓN:

a) Sea el siguiente esquema del movimiento descrito:



Tendremos que $x_1 = ½\, a_1\, t_1^2$ y $x_2 = v_{t1} \cdot t_2 - ½\, a_2\, t_2^2$.

Se cumple: $x_1 + x_2 = 300$

Además: $v_B = v_{t1} - a_2\, t_2 = 0$

Pero: $v_{t1} = a_1\, t_1$, y sustituyendo arriba: $a_1\, t_1 - a_2\, t_2 = 0$, es decir, $a_1\, t_1 = a_2\, t_2$.

Con los datos nos queda la igualdad anterior: $0{,}7\, g\, t_1 = 0{,}6\, g\, t_2$, o sea: $\frac{t_2}{t_1} = \frac{7}{6}$.

Utilizando las ecuaciones de los espacios:

$x_1 = ½\, 0{,}7\, g\, t_1^2$; $\quad x_1 = 0{,}35\, g\, t_1^2 \quad (1)$

$x_2 = v_{t1} \cdot t_2 - ½\, 0{,}6\, g\, t_2^2 = a_1\, t_1\, t_2 - ½\, 0{,}6\, g\, t_2^2 = 0{,}7\, g\, t_1 \frac{7}{6} t_1 - ½\, 0{,}6\, g\, (\frac{7}{6} t_1)^2$

Agrupando y simplificando en la ecuación de x_2: $x_2 = 0{,}4083\, g\, t_1^2 \quad (2)$

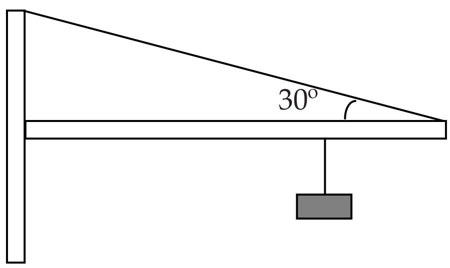
Sumando (1) + (2), o sea $x_1 + x_2 = 300$, tenemos:

$0{,}35\, g\, t_1^2 + 0{,}4083\, g\, t_1^2 = 300$, de donde $t_1 = 6{,}35$ s, lo que nos da $t_2 = 7{,}42$ s.

El tiempo necesario será: $t = t_1 + t_2 = 13{,}76$ s.

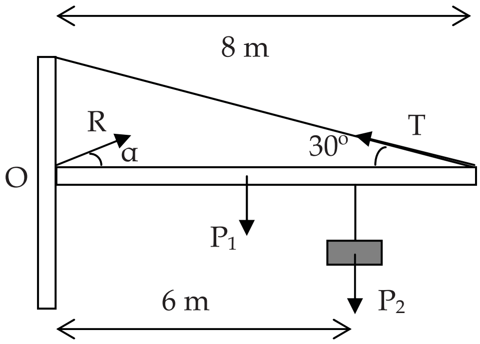
b) $v_{max} = v_{t1} = a_1\, t_1 = 0{,}7\, g\, t_1 = 43{,}56$ m/s $= 156{,}82$ km/h.

9) La viga de la figura, cuya masa es de 1000 kg y tiene 8 m de largo, hace de carril aéreo. Sobre ella desliza un colgador en el que colocamos 2000 kg de carga. Calcular la tensión del cable de soporte, la fuerza ejercida por la pared sobre la viga y el ángulo que forma esta fuerza con la horizontal cuando la carga se encuentra a una distancia de 6 m de la pared. (Se desprecian los pesos del colgador y del cable)



SOLUCIÓN:

El esquema de fuerzas es:



(P_1 = 9800 N P_2 = 19600 L = 8 m)

Es un problema típico de estática que se resuelve aplicando las condiciones de equilibrio, esto es, la suma de las componentes de las fuerzas en cada eje será cero y la suma de los momentos respecto al punto O será también nula.

$\sum F_x = 0 \;\; \Rightarrow$ R cos α = T cos 30, o sea: R cos α = 0,866 T (1)

$\sum F_y = 0 \;\; \Rightarrow$ R sen α + T sen 30 = $P_1 + P_2$, o sea: R sen α + 0,5 T = 29400 (2)

$\sum M_O = 0 \;\; \Rightarrow P_1 \frac{L}{2} + P_2 \cdot 6 = T \text{ sen } 30 \cdot L \Rightarrow 3920 + 117600 = 4\,T \;\Rightarrow T = 39200$ N

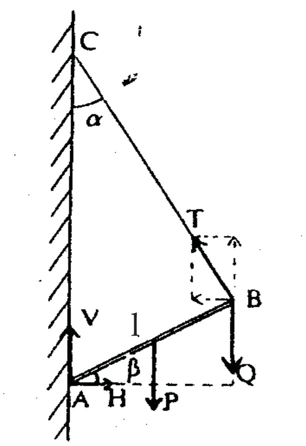
Llevando ese valor de T a (1) y (2) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} R \cos \alpha = 33948{,}2 \\ R \text{ sen } \alpha = 9800 \end{array}\right\}$$

Resolviendo: tg α = 0,2877 ⇒ α = 19,61º

Por último, R sen 19,61 = 9800 ⇒ R = 35339 N

10) Una barra homogénea de peso 20 kp está articulada en A (ver figura) y en su otro extremo B está sostenida por un cable tenso, sujeto a un punto C de la pared. La barra lleva colgado en B un peso de 40 kp y el sistema está en equilibrio cuando los dos ángulos, α y β son de 30º. Hallar la tensión del cable y las componentes horizontal y vertical de la reacción en A.



SOLUCIÓN:

H y V son las componentes de la reacción de la pared en la articulación A. Se cumple que: α = β = 30 º, y el Ángulo de la componente horizontal de T será: 90 – α = 60º

Por otro lado, en la figura P = 20 kp y Q = 40 kp, mientras que l (longitud de la barra) no se conoce.

Aplicamos las condiciones de equilibrio:

$\sum Fx = 0$ H – T cosα = 0 (1)

$\sum Fy = 0$ T sen 60 + V – P – Q = 0 (2)

$\sum M_A = 0$, es decir, tomamos los momentos respecto de A

Y suponemos positivos los del sentido contrario a las agujas del reloj. T forma 90º con la barra porque 90 – α + β = 90. Luego:

$$T\,l - Q\,l\cos\beta - P\,\frac{l}{2}\cos\beta = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo los valores conocidos en las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &H - \frac{T}{2} = 0 \\ &\frac{\sqrt{3}}{2}T + V - 60 = 0 \\ &T - 40\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{20}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

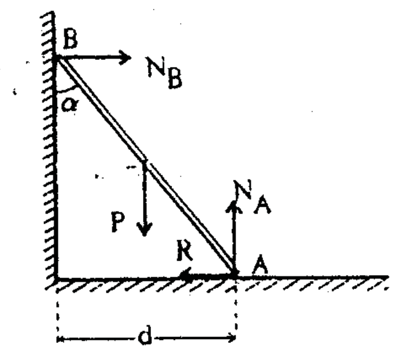
Resolviendo tenemos:

$$T = 25\sqrt{3}\ \text{kp} = 43{,}3\ \text{kp} \qquad H = 21{,}65\ \text{kp}\ \ \text{y}\ \ V = 23{,}5\ \text{kp}$$

11) Una barra homogénea, de longitud l y peso P, se apoya sin rozamiento en B contra una pared vertical y por su extremo A sobre un suelo horizontal con un coeficiente de rozamiento μ_1. Sea d la longitud de la proyección horizontal de la barra sobre el suelo (ver figura)

a) Encontrar a partir de qué valor d_1 de d es necesario colocar en A un peso P_A para evitar que la barra deslice.

b) Para un valor d_2 de la proyección, hallar qué peso mínimo P_A debemos colocar, siendo μ_2 su coeficiente de rozamiento con el suelo.



SOLUCIÓN:

a) Aplicando las condiciones de equilibrio:

$$\sum Fx = 0 \quad N_B - F_R = 0 \;\Rightarrow\; N_B = F_R \quad (1)$$

$$\sum Fy = 0 \quad N_A - P = 0 \;\Rightarrow\; N_A = P \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -N_B\,l\cos\alpha + P\,\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\alpha = 0$$

Es decir: $N_B\,l\cos\alpha = P\,\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\alpha \quad (3)$

De (3): $\text{tg}\,\alpha = \frac{2\,N_B}{P} = \frac{2\,F_R}{P} = \frac{2\,\mu_1\,N_A}{N_A} = 2\,\mu_1$

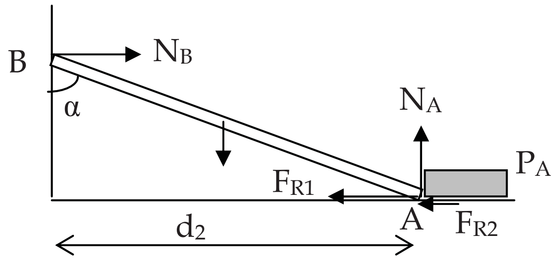
Entonces: $2\,\mu_1 = \frac{d_1}{\sqrt{l^2 - d_1^{\,2}}} \;\Rightarrow\; 4\,\mu_1^{\,2} = \frac{d_1^{\,2}}{l^2 - d_1^{\,2}} \;\Rightarrow\; 4\,\mu_1^{\,2}\left(l^2 - d_1^{\,2}\right) = d_1^{\,2}$

Operando: $d_1^{\,2} + 4\,\mu_1^{\,2}\cdot d_1^{\,2} = 4\,\mu_1^{\,2}\cdot l^2 \;\Rightarrow\; d_1^{\,2} = \frac{4\,\mu_1^{\,2}\cdot l^2}{1 + 4\,\mu_1^{\,2}}$

Y finalmente: $d_1 = \dfrac{2\,\mu_1 \cdot l}{\sqrt{1+4\,\mu_1^{\,2}}}$

b) Ahora la situación de equilibrio es:

Aplicando las tres condiciones de equilibrio al nuevo caso:



$\sum Fx = 0 \quad N_B - F_{R1} - F_{R2} = 0 \quad (1)$

$\sum Fy = 0 \quad N_A - P = 0 \Rightarrow \quad N_A = P \quad (2)$

$\sum M_A = 0 \quad P\,\dfrac{l}{2}\,\text{sen}\,\alpha - N_B\, l \cos\alpha = 0 \quad (3)$

De (1): $N_B = \mu_1 N_A + \mu_2 P_A$

De (3): $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{2\,N_B}{P} = \dfrac{2\left(\mu_1\,P + \mu_2\,P_A\right)}{P} = \dfrac{d_2}{\sqrt{l^2 - d_2^{\,2}}}$

Así: $\left(\mu_1\,P + \mu_2\,P_A\right) = P\dfrac{d_2}{2\sqrt{l^2 - d_2^{\,2}}}$

$$\mu_2\,P_A = P\dfrac{d_2}{2\sqrt{l^2 - d_2^{\,2}}} - \mu_1\,P$$

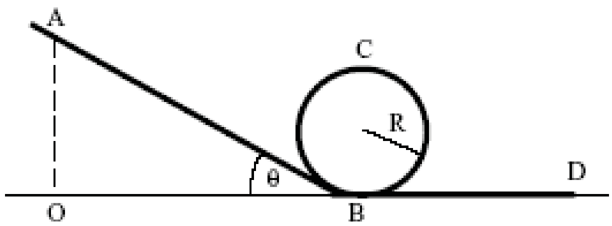
Por último: $P_A = \left(\dfrac{d_2}{2\sqrt{l^2 - d_2^{\,2}}} - \mu_1\right)\dfrac{P}{\mu_2}$

12) Un cuerpo de masa m y pequeñas dimensiones desliza sin rozamiento por el rail de la figura partiendo desde el punto A en reposo. Si OA = 3R, hallar:

a) El módulo de la velocidad en B, en C, y en D, siendo BD = 5R.

b) La fuerza resultante sobre el rail en C.

c) Cuánto debe valer OA para que dicha fuerza sea nula.



SOLUCIÓN:

a) Aplicaremos el principio de conservación de la energía mecánica, por lo que podemos escribir:

$m\,g\,h_A = ½\,m\,v_B^2$,

de donde $v_B = \sqrt{6 \cdot g \cdot R}$

$m\,g\,h_C + ½\,m\,v_C^2 = ½\,m\,v_B^2 = 3\,g\,R$, de donde $v_C = \sqrt{2 \cdot g \cdot R}$

$m\,g\,h_A = ½\,m\,v_D^2$, siendo, pues $v_D = v_B = \sqrt{6 \cdot g \cdot R}$